GEOMETRÍA Y MECÁNICA
DE LAS ARTES Y OFICIOS
Y DE LAS BELLAS ARTES.

CURSO NORMAL

Para el uso de los artistas y menestrales, y de los maestros y veedores de los talleres y fábricas.

Esplicado en el Conservatorio Real de Artes y Oficios

POR EL BARON CARLOS DUPIN,

MIEMBRO DEL INSTITUTO (ACADEMIA DE LAS CIENCIAS), OFICIAL SUPERIOR DEL CUERPO DE INGENIEROS DE MARINA, OFICIAL DE LA LEGION DE HONOR Y CABALLERO DE SAN LUIS.

TRADUCIDO AL CASTELLANO

DE ORDEN DEL REY NUESTRO SEÑOR,

POR DON JUAN LOPEZ PEÑALVER DE LA TORRE,

DEL CONSEJO DE S. M. Y SU SECRETARIO HONORÁRIO.

TOMO I.

CONTIENE LA GEOMETRIA.

MADRID: 1830.

IMPRENTA DE DON JOSÉ DEL COLLADO.

Á LOS ARTESANOS FRANCESES.

Amigos mios:

Yo os consagro la obra que me ha causado mayor placer el componerla. Os ofrezco las lecciones que he esplicado á muchos de vosotros, quienes han sacado de ellas algun fruto. Ojalá se estienda á todos vosotros igual fruto desde un estremo á otro de nuestra amada patria.

Yo he estado en el país de nuestros rivales en la industria. Allí he visto que los sábios y los ricos reunen sus esfuerzos para proporcionar á los artesanos ingleses, escoceses é irlandeses una instruccion nueva que hace á los hombres mas hábiles, mas acomodados y mas cuerdos. Yo he deseado que tengais los mismos bienes, y aun mayores, y me ha parecido que se podria daros una enseñanza mas completa y ventajosa, que es lo que me he propuesto hacer.

Jamás he deseado tan ardientemente el buen éxîto de ninguna empresa, porque jamás he tenido la esperanza de ser mas útil á tantos hombres y á tantos compatriotas.

Si estudiais las lecciones que publico para vuestra instruccion, cada uno apreciará mejor los servicios que la ciencia puede suministrar en su profesion, cada uno aprenderá que las demas profesiones sacan de la ciencia semejantes servicios. A veces lo que la ciencia ha hecho para un oficio os dará idea de lo que puede hacer

para otro; y de esta manera las mejoras de un arte servirán para mejorar otras muchas artes. Cuando alguno de vosotros mejore alguna operacion de su industria particular, dígase así mismo con alegría generosa: "El «servicio que acabo de hacer á los artesanos que traba«jan en el mismo arte que yo, dará tal vez orígen á otros «servicios semejantes para otros muchos artesanos que «trabajan en otras distintas cosas, y acaso habré logra«do ser útil á todo mi país." ¡Artesanos franceses, levantad vuestro pensamiento, y aspirad á la dicha de semejante esperanza!

Si estudiais la aplicacion de la geometría y de la mecánica á vuestras artes y oficios, hallareis en tal estudio el medio de trabajar con mas regularidad, con mas puntualidad, mas inteligencia, facilidad y rapidéz. Vuestra obra será mejor y mas pronto hecha: aprendereis á raciocinar sobre lo que ejecutais y sobre lo que inventeis.

No dudeis que la naturaleza tan generosa con la nacion francesa habrá formado entre vosotros muchos talentos ocultos, muchos ingenios perspicaces, que solo con el uso habitual de la reflexion y el egercicio del pensar, producirán en sus artes respectivas obras maestras y perfectas. ¡Ojalá que la obra que yo publico fuese capáz de hacer desplegarse tales talentos superiores para bien de la Francia!

Seria muy largo si intentase hablaros de todos los hombres que salidos de vuestra esfera han llenado la tierra con sus nombres: citaré solo algunos ejemplos.

Ese Franklin, que fue el defensor y el embajador de su país, que nos enseñó lo que no se sabia antes que él,

á apoderarnos del rayo y guiarlo con pararayos para libertar nuestras casas, nuestras iglesias y palacios: ese Franklin era un artesano, un *oficial de imprenta*, que estudió la aplicacion de la geometría y mecánica á las artes.

Ese Arkwright, que en una sola máquina ha dado á los ingleses el medio de ser los primeros en treinta años en el arte de hilar el algodon; arte en que los de la India sobresalieron por mas de tres mil años: ese Arkwright, que ha dado á su país natal los medios de esportar anualmente á todos los puntos del globo por mas de cuatrocientos millones de esta materia hilada ó tejida, ese era un artesano, un *peluquero*, que se dió á meditar sobre la mecánica.

Ese Wat, que mejoró la máquina de vapor, y él solo dió á sus conciudadanos una fuerza igual á la fuerza productiva de dos millones de hombres robustos, ese Wat, á quien el Rey de Inglaterra y los ministros, y los sábios de tres reinos, han votado hace poco una estátua, que ha de colocarse cerca del panteon de los Monarcas y de los Barones ilustres; ese era un *remendon de instrumentos de matemáticas*; pero ese remendon supo aplicar la mecánica y la geometría.

Finalmente, ese Dalembert, que ha dilatado los límites de la geometría, de la mecánica y de la astronomía; ese sábio francés, que vivia en amistad con los Reyes y Emperadores, ese estaba en una tienda de vidriero cuando empezó á desplegarse su talento.

Veis aquí ejemplos que hablan, y son bastantes para inflamar con noble celo á los que dotados de ingenio pueden seguir tales huellas.

Estos serán á la verdad muy pocos. A los demas les bastará adquirir medios de ejecutar con mas inteligencia, y de consiguiente con mayor placer, ciertas operaciones que las hará menos trabajosas la combinacion del saber y de la destreza: les bastará haber adquirido medios de aumentar su bienestar y el de su familia.

Cuando disfruteis de esta mejor suerte, cuando dejando el trabajo volvais al lado de vuestra muger y de vuestros hijos, si yo he logrado ayudaros en algo para hallar el medio de satisfacer mejor sus necesidades, para hacerlos mas afortunados, para vestirlos mejor, para que tengan mejor habitacion, para alimentarlos mejor, para instruirlos con mas tino, y enseñarles mas cosas útiles; cuando goceis tal dicha y disfruteis de suerte mas felíz, si os queda algun momento de ócio, traed á la memoria los votos y la esperanza de vuestro amigo

CÁRLOS DUPIN.

NOTA PRELIMINAR

Sobre los progresos de la enseñanza de la geometría y mecánica, aplicadas á las artes y oficios.

Hemos empezado esta enseñanza en noviembre de 1824 en el Conservatorio de Artes y Oficios. Mas de seiscientas personas, maestros de fábricas y talleres, artesanos y meros operarios, han asistido á ellos con celo y atencion, dignos de los mayores elogios.

En enero de 1825 Mr. Morin, ingeniero de puentes y calzadas, empezó en Nevers un curso como este, al que asistieron mas de doscientas personas.

En julio de 1825 Mr. Guigon de Grandval, profesor real de hidrografía en la Rochela, abrió tambien un curso de geometría aplicada á las artes. A las primeras lecciones asistieron trescientas personas, y al mes habia trescientas y ochenta.

En Metz, MM. Poncelet, Bergery, Bardin, Voisard y Lemoine, discípulos que han sido de la escuela Politécnica, se proponen dar lecciones de esta especie desde noviembre próximo (de 1825.)

En Leon Mr. Tabaraud, oficial de Ingenieros militares, va á empezar por el mismo tiempo la enseñanza de la geometría de las artes y oficios.

En Amiens, un arquitecto y un profesor de aplicacion de las ciencias á la industria van á seguir estos ejemplos. Lo mismo se proponen hacer varias personas generosas en Lila, Versalles, Bar-le-Duc, Estrasburgo, &c.

Tenemos motivo de esperar que el ilustre duque de la Rochefaucauld-Leaucourt establecerá por sí, y á su costa, una enseñanza de esta especie en Liancourt, dando con esto un noble ejemplo á los fabricantes ricos

que tienen vastos establecimientos de industria, y mantienen á muchos operarios.

Los Ternaux, los Poupart de Neuflize, los Kœchlin, los Hartmann, los Perier, los Delessert y otros han ofrecido su apoyo y vasto crédito para propagar esta enseñanza en todas nuestras ciudades fabricantes.

El conde de Chabrol, ministro de la Marina y de las Colonias, ha dispuesto que todos los profesores de hidrografía, en *cuarenta y cuatro* puertos de mar, enseñen este curso que publicamos. De esta manera la geometría y la mecánica, aplicadas á las artes y oficios, se enseñarán á la clase industrial en las ciudades de Marsella, Burdeos, Nantes, Caen, el Havre, Ruan, Dunquerque, Brest, Cherburgo, Lorient, Rochefort, Tolon, &c. Veis ahí uno de los mas nobles beneficios que hace el gobierno á las fábricas y al comercio de Francia.

A medida que se propague la nueva enseñanza, á medida que se hagan sacrificios generosos, que se ejecuten tentativas útiles, que se logren resultados ventajosos en las ciudades del interior ó de las costas, rogamos á los profesores, á los fabricantes y á las autoridades que tengan la bondad de darnos noticia de ello, para que podamos ofrecerlos como ejemplo al resto de la Francia, y que nazca una emulacion saludable entre todas las ciudades industriosas.

GEOMETRÍA

DE LAS

ARTES Y OFICIOS

Y DE LAS BELLAS ARTES.

LECCION PRIMERA.

La línea recta, los ángulos, las perpendiculares y las oblícuas.

El objeto de la Geometría es medir las estensiones y valuar sus relaciones.

Una estension puede estimarse en tres dimensiones; longitud, latitud, altura ó grueso.

Todos los cuerpos que contiene la naturaleza, y todos los que la industria elabora presentan estas tres dimensiones.

Todo espacio, sea vacío, sea ocupado por un cuerpo, tambien presenta estas tres dimensiones.

La superficie de un cuerpo se compone de todos los puntos que separan la porcion del espacio ocupado por este cuerpo y por el resto del espacio.

Por consecuencia una superficie tiene necesariamente longitud y latitud, pero no tiene grueso; los puntos ocultos en el grueso de un cuerpo no pueden ser parte de la superficie misma de este cuerpo.

Se llama *línea* la serie contínua de puntos que separan dos porciones de la superficie de un cuerpo.

Una línea geométrica no tiene ni grueso ni latitud, sino longitud.

El espacio que un cuerpo ocupa en un momento dado, tiene todas las dimensiones de este cuerpo. Es fácil formarse una idea clara de esto, moldando este mismo cuerpo y sacándole de su molde. Entonces á la vista del molde se forma una imagen muy exacta del espacio que el cuerpo ocupaba. Una caja vacía encierra una porcion del espacio, y la figura de esta porcion es precisamente la del interior de la caja.

Todas las propiedades geométricas de las dimensiones de un cuerpo pertenecen por consecuencia á las dimensiones del espacio ocupado por este cuerpo. Lo mismo es respecto á las propiedades que tiene la superficie de los cuerpos y las de la parte del espacio ocupado en un momento, dado por esta superficie.

Hé aqui porqué el geómetra puramente teórico no atiende á tal ó tal cuerpo en particular, ni á su superficie individual para estudiar las relaciones que tienen las dimensiones de este cuerpo ni de esta superficie, y considera en el espacio las formas mismas del cuerpo y de su superficie, y estas formas le bastan. Esta abstraccion presenta algunas dificultades; pero ejercita el ingenio y fortifica la imaginacion, y al fin suministra grandes recursos en las concepciones de la geometría pura y de la geometría aplicada á las artes. Es pues muy importante el habituar á ello por grados á los alumnos. Y hagámosles observar una diferencia esencial entre los cuerpos, tales como los considera el geómetra, y aquellos sobre los cuales el artista trabaja.

En geometría nada impide á nuestra imaginacion el suponer cuerpos que entran uno en otro, de manera que ocupen á la vez en todo ó en parte una misma porcion del espacio. Pero en las artes no puede ser asi. Jamás las partes materiales de dos cuerpos pueden ocupar á la vez un mismo espacio. Cuando parezca que esto sucede, se debe concluir que las porciones materiales del uno se colocan en los vacíos del otro,

que es lo que acontece cuando el agua se filtra en una esponja. Son muy esenciales estas consideraciones para entender los efectos y la accion de las máquinas.

Si se supone que en un cuerpo se disminuye por grados su longitud, su latitud y su grueso se acercará cada vez mas hácia un límite ideal. Este es el punto de los geómetras, en el cual cada una de estas dimensiones se reduce á cero.

En las artes se da varias veces el nombre de *punto* á las porciones de superficie, y de sólido que no tienen sino dimensiones muy pequeñas. Tales son los puntos de la escritura, los de las líneas *puntuadas* en el dibujo geométrico, ó del *punteado* en el dibujo al lapiz en la miniatura, en grabado &c. Tal es tambien el *punto de costura* de los sastres, &c.

Se llama *punta*, *punzon* un cuerpo agudo que se termina en el parage en que acaba su longitud, por una parte casi sin latitud, y se asemeja al punto, tal cual lo conciben los geómetras.

Es esencial que los alumnos se habitúen á distinguir bien estas diversas maneras de considerar el punto en la geometría pura y sus aplicaciones.

A fin de facilitar el estudio de la geometría se tratará primeramente de las líneas, despues de las superficies, y en seguida de los cuerpos que se llaman *volúmenes*, respecto al espacio que ocupan, y *sólidos* si tienen formas que pueden conservar por sí mismos sin estar contenidos en vasos ó bordes resistentes, como el vino en las botellas, el agua en el lecho de los rios, de los lagos y los mares, &c.

La geometría supone que los cuerpos son sólidos, ó á lo menos que su figura no está sujeta á mudarse sin regla ni límite desde el momento en que la toma por objeto de su estudio.

La línea mas sencilla y que se emplea mas frecuentemente en las artes, es la *línea recta*.

La línea recta es la que se anda siguiendo siempre

una misma direccion, y esta es el camino mas corto para ir de un punto á otro.

Como no hay entre dos puntos mas que un camino que sea el mas corto, no se puede tirar entre dos puntos mas que una sola línea recta. Luego cuando dos líneas rectas se terminan en unos mismos puntos no forman mas que una. Si estas líneas rectas están figuradas sobre dos cuerpos, acercando estos dos cuerpos, de manera que estén en contacto dos puntos de la primera recta con dos puntos de la segunda, las dos rectas se aplican exactamente una sobre otra como si no formasen mas que una sola. La industria usa de esta propiedad de la línea recta, á saber:

1.° *Para asegurarse de que una línea recta ya trazada es recta por medio de otra línea que se sabe que es perfectamente recta.* En efecto, es suficiente aplicar en dos puntos la segunda sobre la primera para ver si se aplica tambien en todos los demas puntos. En el caso contrario, la línea examinada no es recta, y se puede hacer que lo sea, esto es, rectificarla. 2.° *Para trazar líneas rectas.* Las líneas rectas se trazan con cuerpos que tienen una ó muchas aristas rectilíneas como las reglas.

Se sienta la regla sobre una superficie en que la línea recta que representa esta regla se aplica exactamente en todos sus puntos : sin esto no es posible trazar una línea recta sobre una superficie. Despues con un lapiz, un punzon, ó cualquiera otro instrumento que se termine en punta ó en corte, se traza una línea que toque en toda su estension á la regla, y ésta será una línea recta.

Véase aquí como el vidriero con una regla y una punta de diamante corta en línea recta los vidrios que quiere poner en las vidrieras.

Cuando se intenta trazar una línea recta, que pase por dos puntos dados, es menester acercar igualmente la regla á estos dos puntos, y tan cerca como lo permita el grueso del lapiz ó de la punta con que se

ha de trazar; despues se ha de tener la regla en una posicion invariable durante el trazado, teniendo cuidado de que el lapiz ó el punzon camine siempre en contacto con la regla.

Cuando los alumnos empiecen á dibujar figuras geométricas necesitarán cuidado y tiempo para tirar exactamente una simple línea recta, aunque sea de lapiz. Cuando traten de hacerlo con tinta tendrán una dificultad mas, y es la de conservar á las líneas que tracen el mismo grueso en toda su estension. Si la hacen muy gruesa podrá esto alterar la exactitud del dibujo. Así es necesario que los alumnos se habitúen por grados á no dar á las líneas que tracen mas grueso que el necesario para que sean distintamente visibles.

Cuando hablamos del grueso de las líneas, solo es respecto de los trabajos de las artes, pues es menester decir de ella lo que dijimos del punto: el geómetra supone que esta línea no tiene mas que longitud sin latitud. Al contrario todas las líneas ejecutadas en las artes tienen latitud, hasta las que representan las líneas ideales de los geómetras.

En la industria llaman frecuentemente línea á las cavidades y relieves estrechos poco profundos y muy largos, que por eso se asemejan á la línea ideal de los geómetras. Tales son las líneas de *fortificacion pasagera* con que el sitiador ó el sitiado circundan una plaza.

En lo escrito y lo impreso se llama *línea* (1) á una continuacion de palabras puestas en una misma direccion, y cuya altura es muy pequeña respecto de su largo.

La direccion de los renglones, tanto en lo manuscrito como en lo impreso, da tambien la idea de la línea recta.

Los cordeleros llaman línea á una cuerda que tie-

(1) *En castellano se llama esto renglon.*

ne muy poco grueso comparativamente con su longitud. Esta línea ó cordel se debe contar entre los instrumentos de geometría práctica que se emplean en las artes. Un cordel que está tirante por los dos estremos, no teniendo en consideracion los efectos de la gravedad, toma la figura de una línea recta. Si se frota este cordel con blanco, rojo ó negro, poniéndole bien tirante sobre la superficie en que se quiera hacer la impresión de una línea recta, y despues se le pinza para dejarle caer sobre la superficie, trazará en ella la línea recta.

Insistimos todavía en cuanto á la línea recta y al punto, en que se distinga con el mayor cuidado el trazado ideal del geómetra, y el trazado material del artista. Se verá que en muchos casos el progreso de las artes consiste en acercarse mas y mas en las operaciones de la industria á este ideal geométrico, cuya naturaleza y propiedades es muy importante dar á conocer á los alumnos.

Antes de esto es menester darles la idea de una superficie que se puede formar con una línea recta; tal es la *superficie plana, ó el plano.*

En cualquier sentido que se ponga una línea recta sobre un plano, si dos puntos de la línea recta están en contacto con el plano, todos los demas puntos de dicha línea lo estarán igualmente.

En las artes, el plano puede servir para fabricar la línea recta, y la línea recta para fabricar el plano. Esto lo esplicaremos mas por menor, cuando hablemos especialmente de las superficies. (Véase la sesta leccion).

La mayor parte de los trazados necesarios en las artes se ejecutan sobre un plano preparado ya para este efecto. Si los trazados son pequeños se hacen en una hoja de papel, de pergamino, y tambien en marfil; y si son grandes, generalmente se prepara un gran tablero, como lo hacen los constructores de buques. Los carpinteros de obras de á fuera y los aparejadores suelen hacer sus trazados en la superficie plana de una pared. Los ingenieros trazan la montéa en los puentes sobre planos horizontales de yeso, en lo cual no puede lograrse la exactitud, si antes no se ha ajustado bien la superficie que se supone plana, de manera que haya seguridad de que poniendo una línea recta sobre el plano en todos sentidos, se aplique ó ajuste exactamente á él, desde un estremo al otro de dicha línea.

Medidas de longitud. Como la línea recta es el camino mas corto para ir de un punto á otro, será muy conveniente servirse de ella para medir la distancia mas corta entre dos puntos.

Las dimensiones ordinarias de los cuerpos se miden con la línea recta. Asi es, que con ella se mide la longitud, latitud y altura de una pila de madera de una casa, de una nave, &c.

A fin de comparar estas medidas diferentes, es necesario tomar una por unidad, y ver cuántas veces está repetida en el objeto medido. Si está repetida en él 1, 2, 3, 4, 5 veces, en una palabra un número exacto de veces, no hay ninguna dificultad; pero no es lo mismo cuando queda que medir una parte que no iguala una vez á la longitud tomada por unidad.

Entonces se toma la unidad de longitud y se divide en un cierto número de partes iguales, en 10, en 100, en 1000; despues se busca cuántas décimas, centésimas, milésimas, &c. de la unidad de medida contiene la parte que queda por medir.

Escala. Es una línea recta AB, fig. 1. sobre la cual se señala un cierto número de unidades de medida, y las subdivisiones de estas unidades. La geometría enseña los medios de dividir y trazar las escalas con una grande exactitud. Esta es una de las operaciones mas importantes de la industria en que el éxito depende de la precision. (Véase la quinta leccion).

Es muy conveniente que los artistas tengan una línea recta dividida segun el sistema de medidas universalmente adoptado.

Generalmente los artesanos, por una economía mal entendida, compran á vil precio medidas que no estan divididas con exactitud ó que estan sujetas á alterarse. Deben por el contrario hacer todo lo posible por comprar *buenas* medidas y *buenos* instrumentos en todo género: la perfeccion que con estos instrumentos darán á sus obras les indemnizará con usura de su coste. Esta es una verdad en que varias veces volveremos á insistir.

Despues de haber considerado la línea recta aisladamente, ahora vamos á considerar varias rectas en sus relaciones de posicion.

Supongamos que la línea recta ABX, fig. 2, gira alrededor del punto fijo A, y adquiere sucesivamente las posiciones AC, AD, AE, &c.; en este movimiento se apartará mas y mas de la posicion primitiva ABX. Se llama ángulo el desvío BAC ó BAD, ó BAE, &c., de una línea respecto de otra: el punto A de donde parten dos líneas AB, AC es el *vértice* del ángulo; las mismas líneas AB, AC son los *lados* del ángulo.

Para nombrar el ángulo formado por los lados AB, AC, se dice algunas veces el ángulo A y mas generalmente el ángulo BAC, poniendo la letra A que señala el vértice entre B y C que pertenecen respectivamente á los dos lados.

La línea AX, fig. 2, girando siempre alrededor del vértice A, llegará á la posicion AM directamente opuesta á AB. Si continúa girando se acercará á AB por el lado contrario, hasta que venga á caer sobre la misma AB despues de haber dado una vuelta completa.

Es evidente que en la posicion AM, la línea recta AX ha dado *media vuelta* desde AB; en efecto, si se dobla la parte de la figura BAME sobre la parte inferior, la primera cubrirá exactamente á la segunda, y se confundirá con ella.

En las maniobras de las tropas, despues de haberlas alineado, esto es, colocado en línea recta, y haciendo frente á un lado, hay necesidad frecuentemente de hacer frente al lado opuesto. Entonces se manda *media vuelta*, que se ejecuta por la derecha, é inmediatamente cada hombre se pone á girar sobre uno de sus talones A, fig. 3. Para hacer libremente este movimiento pone el otro pie B detras del primero, posicion fig. 4, y gira al mismo tiempo sobre sus talones. Cada uno de los dos pies da *media vuelta*, fig. 5. Entonces el pie que estaba detras está delante; y lo vuelve á poner en la línea del primero, fig. 6. Si el soldado diese otra media vuelta se encontraria en su direccion primitiva y habria dado *una vuelta entera*.

Consideremos los ángulos que forma la recta AC con la recta DAB, en la figura 7. Hay en ella dos ángulos, el uno menor y el otro mayor BAC y CAD; su suma es siempre igual á media vuelta de revolucion de AC, desde AB hasta AD.

Luego el ángulo BAC es lo que falta al ángulo DAC para formar media vuelta completa; del mismo modo DAC es lo que falta al ángulo BAC para formar media vuelta completa. He aquí porque se dice que BAC es el *suplemento* ó el *ángulo suplementario* de DAC; y del mismo modo que DAC es el *suplemento* ó el *ángulo suplementario* de BAC.

Supongamos que el ángulo BAC aumente, porque AC se desvie de AB; entonces el ángulo suplementario DAC disminuirá y llegará un instante en que sean iguales, fig. 8, el ángulo menor BAC creciendo siempre y el mayor DAC disminuyendo. Cada uno de estos ángulos iguales es lo que se llama un ángulo recto. Así el ángulo recto es la mitad de una media vuelta de una revolucion completa: esto es, *un cuarto de vuelta*.

El *ángulo recto* BAC ó DAC, fig. 8, ó cuarto de vuelta, es un ángulo que hay que construir ó que medir á cada paso para ejecutar un sin número de trabajos de las artes.

En la maniobra de las tropas las mas veces se hace

uso del cuarto de vuelta, que se llama *cuarto de conversion*. Cuando un peloton alineado sobre AB, fig. 8, debe pasar de esta posicion á la posicion perpendicular AC, gira ó se vuelve alrededor del punto A; y haria una vuelta, una conversion completa para volver á su primera posicion, si girase siempre en el mismo sentido; pero no ha hecho mas que un *cuarto de conversion* para llegar á la posicion perpendicular. Se determina el sentido del movimiento mandando la conversion *por la derecha* ó *por la izquierda*.

Supongamos ahora dos nuevas líneas rectas MON y OL, fig. 9 y 10, respecto á las cuales se haya hallado igualmente la posicion de OL, tal que los dos ángulos NOL y MOL son iguales. Yo digo que estos dos ángulos son iguales á los dos primeros BAC, CAD, fig. 8, que acabamos de llamar *ángulos rectos*.

* Para demostrarlo pongamos la línea recta DAB, fig. 8, sobre MON, fig. 9, de manera que se confundan en todos sus puntos, como dos líneas rectas pueden hacerlo, y que el punto A caiga sobre el punto O; entonces el lado AC cubrirá exactamente al lado OL. Admitamos, si es posible, que AC, fig. 9, tenga otra posicion, y caiga á la izquierda de OL. Es evidente que siendo iguales entre sí los ángulos CAB, CAD el ángulo MOL que tiene el COL mas que el primer ángulo, y el NOL que tiene el mismo COL menos que el segundo, no podrán ser iguales entre sí. Al contrario, si AC, fig. 10, cayese á la derecha de OL, los ángulos BAC, DAC siendo iguales entre sí, MOL menor que DAC, y NOL mayor que BAC no podrán ser iguales. Por consecuencia AC no puede caer ni á la derecha ni á la izquierda de OL: luego AC cae exactamente sobre OL. Luego los ángulos rectos que forman por una parte las dos líneas rectas AC, BD, y por la otra las dos líneas rectas diferentes OL, MN, son siempre iguales entre sí. *

Tal es el primer principio en que está fundado el uso de la escuadra. *Una escuadra* puede formarse con

dos partes de reglas AB, AC, fig. 11, fijas invariablemente en A, de manera que formen un ángulo recto. Cuando se quiere desde el punto O, fig. 12, tirar una línea OL que forme dos ángulos rectos con MON, se pone un lado AC de la escuadra á lo largo de ON, de manera que el punto A esté tan cerca como sea posible del punto O; despues se traza la línea recta OL segun se acostumbra: y esta será la línea que se busca.

Verificacion de las escuadras. Para verificar la escuadra BAC, fig. 11, lo primero es tirar muy exactamente sobre una superficie plana la línea recta MON, fig. 13; en seguida se pone el lado AC lo mas cerca posible y á lo largo de ON; se traza OL á lo largo de AB. Hecho esto se vuelve la escuadra y se coloca en B′A′C′, poniendo A′C′ á lo largo de OM, y se ve cual es la direccion del segundo lado A′B′. 1.° Si cae exactamente sobre la línea OL ya trazada, la escuadra es exacta. 2.° Si el segundo lado de la escuadra no llega hasta OL, la escuadra es inexacta, y el ángulo que señala muy pequeño. 3.° Si el segundo lado escede á OL, la escuadra tambien es inexacta, y el ángulo que indica muy grande.

Despues veremos de qué modo el artista puede rectificar una escuadra que no es exacta.

Los carpinteros de marina llaman *falsa escuadra* á un instrumento XYZ, fig. 14, muy cómodo para tomar y transportar toda especie de ángulos. Este instrumento se compone de dos reglas que giran sobre un mismo eje al cual estan fijas, de modo que puedan formar todos los ángulos desde el menor hasta el mayor. Se debe tener cuidado de apretar bastante las dos reglas una contra otra, para que así no giren la una sobre la otra, sin esperimentar alguna resistencia de rozamiento, y de suerte que conserven sus posiciones respectivas cuando se deje de hacer esfuerzo para abrir ó cerrar el ángulo que representan. Hecha esta esplicacion, veremos cuan fácil es hacer un ángulo igual á otro BAC, fig. 14, desde un punto O, fig. 15, sien-

do dado un lado OL del nuevo ángulo LOM, que ha de ser igual á BAC.

* Se ajustará la falsa escuadra de manera que los dos lados XY, YZ sigan respectivamente las direcciones AC, AB, fig. 14. En seguida se transportará la falsa escuadra sobre la fig. 15, teniendo cuidado de no alterar el ángulo. Se pondrá XY sobre OL. Entonces trazando con un lápiz una punta ó un cordel la línea recta OM segun el lado YZ, el ángulo MOL será igual á BAC. *

Superposicion. Es esencial observar el medio de que nos valemos aquí, sea para formar ángulos, sea para asegurarnos de que son iguales, poniendo las escuadras sobre las figuras y las figuras unas sobre otras. Este mismo medio sirve en una multitud de prácticas de la industria y en gran número de demostraciones de la Geometría. Cuando dos figuras puestas una sobre otra se ajustan se confunden en todas sus partes, y tienen la misma forma y magnitud, son perfectamente iguales; y se hace una figura igual á otra cuando se ejecuta de manera que cumpla con esta condicion. Así es como los sastres y las modistas ponen los patrones sobre la tela que quieren cortar exactamente segun el contorno de estos patrones que representan las formas que se deben figurar ó cubrir.

Cuando la línea AC, fig. 16, forma con DAB los dos ángulos rectos BAC, CAD, se dice que AC es *perpendicular* á DAB. Por consecuencia se tirará una perpendicular AC á la recta DAB, siempre que se ponga una escuadra XYZ por el lado YZ á lo largo de AB, y se trace una recta AC á lo largo del lado XY. Yo indicaré otros medios de tirar perpendiculares.

Doblemos en dos la fig. 17 por la recta ABE, y siendo iguales los ángulos ABD, ABC, la recta BC caerá sobre BD. Luego el ángulo CBE cubrirá exactamente al DBE; luego estos últimos ángulos son iguales como los dos primeros. Así, cuando dos rectas se

cortan, si entre los cuatro ángulos que forman uno solo es recto, tambien lo serán los otros tres, y entonces cada parte AB, BE de una de las rectas es perpendicular á la otra recta.

Es esencial probar que de un punto B, fig. 18, no se puede tirar mas que una perpendicular BA sobre una línea recta dada DAC.

* Para convencernos, supongamos que del punto B se puedan tirar dos perpendiculares BA, BD, sobre la misma línea recta DAC. Yo prolongo BA de manera que A*b* igual AB; despues tiro la línea recta D*b*, y luego doblo toda la parte DAC*b* sobre DACB. Siendo iguales los ángulos *b*AC, BAC caerá A*b* sobre AB, y el punto *b* sobre el punto B. Luego D*b* tambien cae sobre DB; luego el ángulo AD*b* igual al ángulo recto ADB. Así D*b* seria parte de la perpendicular DB, y se podrian tirar dos líneas rectas *b*AB, *b*DB entre los puntos *b* y B, lo que es absurdo. *

Sentados estos preliminares sobre los ángulos rectos vamos ahora á hablar de los ángulos oblícuos.

Cuando la recta CD, fig. 19, forma dos ángulos desiguales con la recta ACB, hay uno menor y otro mayor que el ángulo recto ACE: el menor se llama *ángulo agudo*, y el mayor *ángulo obtuso*.

Es evidente que estos dos ángulos ocuparán el mismo espacio alrededor de C, en la parte superior de la figura que el que ocupan los dos ángulos rectos ACE, BCE. Luego la suma del ángulo agudo BCD y del ángulo obtuso ACD, es igual á dos ángulos rectos.

En efecto, es fácil ver que el ángulo agudo BCD es igual á un ángulo recto menos DCE, y que el ángulo obtuso ACD es igual á un ángulo recto mas DCE; luego su suma es igual á dos ángulos rectos.

Supongamos ahora que se prolonga DC en el sentido CF, y comparemos los dos nuevos ángulos ACF, BCF con los primeros.

* 1.° El ángulo ACD mas el ángulo BCD, formados por CD y la línea recta AB, son iguales á los dos

ángulos rectos; por consecuencia BCD es igual á dos ángulos rectos menos ACD. 2.° El ángulo ACD, mas el ángulo ACF, formados por AC sobre la línea recta DCF, son iguales á dos ángulos rectos; por consecuencia ACF es igual á dos ángulos rectos, menos ACD. Por consecuencia, tambien BCD, lo mismo que ACF, por ser iguales cada uno á dos ángulos rectos menos ACD, serán iguales entre sí. Del mismo modo se demuestra la igualdad de los ángulos ACD, BCF, que estan opuestos al vértice como los primeros. *

Así, cuando dos líneas rectas se cruzan forman cuatro ángulos; y resulta: 1.°, que los ángulos adyacentes, tomados dos á dos, forman una suma de dos ángulos rectos; y 2.°, que los ángulos *opuestos al vértice* son iguales.

Actualmente podemos comparar entre sí las perpendiculares y las oblícuas.

Si se tira desde un punto D cualquiera, fig. 20, una recta DE hasta la recta AB, y que los ángulos AED, DEB no sean rectos, la línea DE no es perpendicular á AB, sino *oblícua*. Si ademas se tira DC perpendicular á AB, de los dos ángulos AED, BDE, el último, el que mira á DC es *agudo*; y el otro es *obtuso*.

* Ahora yo prolongo DC hasta *d*, de modo que CD sea igual á C*d*. Tiro la recta E*d*, despues doblo la parte inferior de la figura, haciéndola girar sobre AB como sobre una charnela. Entonces C*d* cae sobre CD y D sobre *d* puesto que los ángulos BCD, BC*d* son iguales. Luego E*d* es igual á ED. Ademas la línea angulosa DE*d*, es mas larga que la línea recta D*d* tirada entre los mismos estremos D*d*. Luego la mitad de DE*d*, esto es, la oblícua DE es mas larga que la mitad de DC*d* esto es la perpendicular DC. *

Tal es, pues, la propiedad general de una línea recta DC fig. 20 perpendicular á otra recta AB *el ser mas corta que toda oblícua tirada del estremo D de la perpendicular á esta linea AB.* Las líneas rectas DC, DE miden las distancias del punto D á la línea

recta AB, y resulta que *para ir de un punto á una línea recta el camino mas corto es la perpendicular tirada de este punto á esta recta.*

Hé aquí una de las propiedades de la geometría elemental, de las mas notables y las mas ventajosas en las aplicaciones á las artes.

Ocurrirá muy frecuentemente el tener que hallar las distancias *menos* grandes, las superficies *menos* estensas y los volúmenes *menos* considerables; pero no siempre se hallará con tanta facilidad. Las cuestiones de este órden de las cuales depende toda la economía de las prácticas de la industria nos ocuparán mucho, y trataremos de hacer comprender bien el espíritu de ellas.

Supongamos que habiendo tirado, fig. 21, DB perpendicular á AC, se tenga BA igual á BC. Digo que las oblícuas tiradas desde D hasta A, y desde D hasta C son iguales. En efecto, si doblamos la parte BDC sobre BDA, sirviendo como charnela la perpendicular BD, los dos ángulos rectos ABD, CBD siendo iguales, BC caerá sobre BA y C sobre A, luego DC igual DA. Por consecuencia *dos oblícuas igualmente distantes de la perpendicular son iguales.*

Aplicacion á la verificacion de las perpendiculares. Los dibujantes, los ebanistas, carpinteros, aparejadores &c. hacen frecuente uso de esta propiedad cuando quieren verificar si una línea es perpendicular á otra, sin recurrir á la escuadra. Primeramente miden con la mayor exactitud dos partes BA, BC iguales entre sí, partiendo de la línea BD de que quieren verificar la posicion; despues miden con una regla, ó cualquiera otro instrumento, la distancia de los puntos A y D, esto es la longitud de la oblícua AD, y llevan esta longitud sobre DC tomando por punto de partida el punto D. Si termina exactamente en C entonces las dos oblícuas son iguales, y la línea BD es perpendicular AC.

Cuando se quiere verificar la posicion de una perpendicular DB sobre ABC no se debe tomar la oblícua D*a* demasiado cercana á la perpendicular; porque

si estuviese muy cercana á B cualquier desvío aun cuando fuese bastante sensible en la posicion de esta perpendicular, no produciria mas que uno muy pequeño en la longitud de la oblícua *Db*, y seria fácil equivocarse. Igualmente hay inconvenientes en apartar demasiado las oblícuas. Las mejores posiciones son las que se acercan al caso en que AB, BC, BD son iguales.

Valiéndose de este género de precauciones aplicadas con el mismo objeto á cada caso particular podrán los artistas dar á sus dibujos, á sus construcciones, y á sus máquinas aquel grado eminente de precision que requiere el estado de una industria muy perfeccionada.

No basta haber probado que las oblícuas son mas largas que la perpendicular, es menester probar *que las oblícuas son tanto mas largas cuanto mas se alejen de la perpendicular.*

* Sea, fig. 22, OD perpendicular á OB: digo que de las dos oblícuas DC, DB la mas corta es la mas próxima á la perpendicular. En efecto tiremos CK perpendicular á CD y por esto mismo tendremos que DC es mas corta que DK y con mayor razon mas que DB. *

* En su lugar veremos que esta propiedad presenta en la mecánica aplicaciones muy frecuentes. Supongamos que se quiera acercar un cuerpo B, fig. 23, á la posicion AC perpendicular á BM. Supongamos tambien que está atado este cuerpo con dos cuerdas BA, BC; que luego se tira de la primera desde el punto A y de la segunda desde el punto C para disminuir las distancias de estos puntos al cuerpo. Será menester que el cuerpo ande mas y mas de manera que presente las líneas AB′ despues AB″ CB′ despues CB″ *cada vez menos oblícuas*, por cuya razon serán mas cortas. Por el contrario, si se hubiese de apartar B de AC se emplearian varillas inflexibles de hierro ó de madera para empujarlo desde los puntos C y A. A dichas varillas se les daria una posicion *cada vez mas oblícua* y por consiguiente un largo cada vez mayor, tanto entre B y A como entre B y C. *

LECCION SEGUNDA.

De las líneas paralelas y de sus combinaciones con las perpendiculares, y las oblícuas.

Dos líneas son paralelas cuando no se encuentran, aunque se prolonguen cuanto se quiera (1).

Por un punto A, fig. 24 y fig. 25, se puede tirar una línea recta AB, que prolongada por los dos estremos no encuentre jamás á otra línea recta CD y no se puede tirar *mas que una* por un mismo punto A.

* Para hallar AB es menester del punto A tirar AC perpendicular á CD; despues AB perpendicular á AC. Entonces AB será paralela á CD. En efecto si las dos líneas AB, CD se encontrasen en un punto de éste se podrian bajar dos perpendiculares sobre una recta AC; cosa que ya hemos demostrado es imposible (leccion primera). *

* Ahora vamos á probar que cualquiera otra línea AE cortará á CD. Por pequeño que sea el ángulo BAE se concibe que haciendo girar AE alrededor de A para alejarla de AB se repetirá el ángulo BAE un número de veces suficiente para cubrir todo el espacio comprendido en el cuarto de vuelta BAC. Y si se toman tantos puntos como se quiera C_1, C_2, C_3, C_4, &c., á la distancia unos de otros igual á CA, y despues se levantan las perpendiculares CD_1, CD_2, CD_3 ...., estas perpendiculares dividirán el espacio $BACC_1C_2C_3$.... en fajas paralelas que todas tendrán la misma superficie que ABCD. Siempre se podrá hacer mayor número de fajas que ángulos pequeños haya BAE; EAE_1; E_1AE_2;

(1) *Se considera que estas líneas se hallan en el mismo plano.*

E_2AE_3;.... en el ángulo recto $BACC_1$. Luego el espacio ocupado por una sola faja BACD...., es siempre menor que el espacio comprendido en un ángulo BAE, por pequeño que sea este ángulo; y tal condicion exige que la línea AE prolongada corte á CD, porque de lo contrario resultaria que el espacio BAE, parte del espacio BACD, era mayor que dicho BACD, lo que es absurdo. *

Asi desde luego que dos rectas AB, CD, son paralelas, si la una es perpendicular á una tercera AC, la otra es tambien perpendicular á esta.

En el arte del dibujo, y los trazados del carpintero de taller, se usa de esta propiedad que tienen las paralelas. Para esto hacen un instrumento que llaman Gramil porque lo forman con dos partes rectas MN, OP, fig. 26, ensambladas en forma de T. Ponen el brazo MN mas grueso y saliente abajo, y á lo largo del borde AD de la tabla ABCD; y como el otro brazo OP es perpendicular al primero, resulta que todas las líneas rectas AB, EF tiradas á lo largo del brazo OP son paralelas.

Cuando hay que ordenar las tropas en columnas, esto es, por pelotones paralelos AB, CD, EF. &c., fig. 27, se colocan los guias A,C,E,G en línea recta, y á igual distancia, despues se alínea cada peloton perpendicularmente á la recta ACEG...., y entonces se puede asegurar que los pelotones estan paralelos entre sí.

Las artes emplean frecuentemente líneas rectas que estan á la misma distancia unas de otras.

En la escritura de mano, y en la impresion de los libros los caractéres estan colocados sobre líneas que tienen todos sus puntos equidistantes, y por consecuencia son paralelas. Estos mismos caractéres tienen sus partes rectas equidistantes como las de una *m* y una *n*; la única diferencia que se observa entre las direcciones paralelas de estas piernas, es que son perpendiculares á las líneas en la escritura redonda, y el carácter de impresion que llaman *redondo*, inclinadas á la derecha en la *cursiva* y la itálica, é inclinadas á la izquierda en la *bastarda*.

La música usa líneas paralelas equidistantes, fig. 28, para poner las notas de que se vale. Se agrupan estas notas de manera que sea necesario un mismo tiempo para cantar ó ejecutar los sonidos de cada grupo; este tiempo es lo que se llama un compás, y los diversos compases están separados por líneas rectas perpendiculares á las primeras paralelas. Por consecuencia estas perpendiculares tambien son paralelas entre sí.

Comunmente se trazan á la vez las cinco líneas paralelas con un tira-líneas de cinco puntas situadas en línea recta que se apoya contra una regla, de modo que las cinco puntas esten en una direccion perpendicular á la regla, y de esta manera se podrán tirar cinco líneas equidistantes que por consecuencia serán paralelas.

El uso de las paralelas es infinito en las artes. El labrador forma sus surcos en líneas paralelas: cuando iguala la tierra llevando el rastrillo en línea recta, las puntas del rastrillo colocadas á igual distancia unas de otras describen líneas rectas paralelas; y por consecuencia las puntas del instrumento dividen igualmente los terrones de tierra que la reja del arado ha separado y levantado por masas mas ó menos gruesas.

Cuando un grabador quiere figurar superficies unidas y planas representa sus partes mas ó menos sombreadas por plumadas mas ó menos fuertes, pero paralelas, y todas á la misma distancia unas de otras.

Cuando quiere representar superficies planas en que una parte se aleja del espectador, ó la superficie del cielo, tambien emplea plumadas rectas paralelas. Puede hacerlas á igual distancia con tal que las mas cercanas al espectador sean mas gruesas que las otras. Tambien puede hacer todas sus plumadas igualmente gruesas, pero cada vez mas separadas unas de otras, á medida que los puntos del espacio que indican estan menos sombreados, ó menos cercanos del espectador. Estas degradaciones mismas estan sujetas á reglas geométri-

cas, y los artistas que quieran operar con inteligencia deben formarse idea exacta de ellas.

Se puede probar ahora que dos líneas rectas paralelas estan á la misma distancia una de otra en toda su estension.

* Habiendo trazado las dos paralelas AB, CD, fig. 6, y las rectas AC, MN, perpendiculares á estas dos líneas, señalemos H á la mitad de AM, y tiremos HK perpendicularmente á las dos paralelas; doblemos en seguida por HK como sobre una charnela la parte izquierda de la figura sobre la parte derecha. Los ángulos rectos KHA, y KHM por una parte, y por otra los HKC, y HKN, siendo iguales entre sí, HA caerá sobre HM y KC sobre KN. Ademas siendo rectos los ángulos HAC, HMN y por consiguiente iguales, la línea AC caerá sobre MN, y el punto C caerá sobre el punto N. Luego la perpendicular AC es igual á la perpendicular MN. *

Así *todas* las perpendiculares como AC, MN, fig. 29, *que miden en diversas posiciones la distancia de dos paralelas, son iguales entre sí.* Estas perpendiculares son las distancias mas cortas de estas paralelas.

Las perpendiculares AC, MN, á la misma recta AB son paralelas: luego las rectas AM, CN que les son perpendiculares son iguales entre sí.

Por consecuencia cuando hay dos paralelas AB, CD, y otras dos rectas AC, MN, paralelas entre sí, pero perpendiculares á las primeras paralelas, las partes de las dos primeras rectas comprendidas entre las segundas son iguales entre sí, y las partes de las dos segundas comprendidas entre las dos primeras son tambien iguales entre sí.

Aplicacion á los caminos de hierro ó caminos de carriles. Son estos unos caminos en los cuales se hacen de antemano, sea en hueco, sea en relieve, unos carriles perfectamente rectos y lisos para que en ellos entren y se muevan las cuatro ruedas de un carro, dos sobre el carril de un lado, y dos sobre el del otro lado. Cuando uno de los dos carriles es recto, el otro

debe estar en toda su estension apartado de aquel á una distancia igual á la que tienen entre sí las ruedas colocadas en su ege. Así los carriles son paralelos. Por lo mismo que los carriles no tienen desigualdades y son exactamente *rectilíneos y paralelos*, resulta la gran ventaja y la economía tan preciosa en los transportes que se hacen sobre estos carriles, comparativamente á los transportes efectuados en los caminos ordinarios.

Supongamos ahora que se haga caminar ácia AB, fig. 29, la línea CD, sin que cese de ser perpendicular á AC; y que no dejará de ser paralela á AB, á la que se acercará mas y mas; pero igualmente en todas sus partes. Este movimiento de las líneas paralelas, y esta igualdad que conservan en sus distancias son de gran importancia en la mecánica.

Aplicacion de las paralelas al movimiento de los Mull-Jenny, ó carros que sirven para hilar el algodon. Imagínese un carro dirigido segun CD, fig. 29, y que pueda adelantar ó retroceder paralelamente AB, por medio de rodajas que corren sobre dos *mortajas ó carriles paralelos* AC, MN. Los hilos de algodon salen de AM, en donde están dispuestos á igual distancia para ir á envolverse en los carretes alineados segun CN, tambien á igual distancia. Cuando el carro CN se aproxima á AM, las distancias de los puntos de la CN, á la recta AM, se disminuyen todas igualmente; por consecuencia, los hilos se enrollan con igualdad en los carretes sin que dejen de estar todos igualmente tirantes. Cuando el carro se aleja de AM, para volver á CN, todos los hilos se alargan igualmente. Asi es como, aprovechándose de la igualdad de las paralelas comprendidas entre paralelas, se han llegado á construir estas bellas máquinas de hilar, que no solamente tienen la ventaja de operar por el solo movimiento de un carro el hilado de 40, 50, 60 hilos y aun mas, sino que tambien sacan todos los hilos con tal igualdad cual jamás se hubiera conseguido hilándolos aparte y sin medios geométricos.

Hasta aquí no hemos comparado las paralelas sino con las perpendiculares: comparémoslas ahora con las *oblícuas*. Supongamos que se tiran, fig. 30, las dos líneas AB, CD, oblícuas con respecto á EACF; si los dos ángulos EAB, ECD *(llamados correspondientes)* son iguales, las dos líneas rectas AB, CD, son paralelas (1).

La recíproca es igualmente verdadera, esto es, cuando estas líneas son paralelas toda oblícua las corta, de manera que forma con ellas cuatro ángulos agudos iguales entre sí, y cuatro ángulos obtusos tambien iguales entre sí (2).

---

(1) *En efecto, si no fuesen paralelas, prolongándolas suficientemente, se encontrarian en alguna parte, sea debajo, sea encima de EACF: veamos si esto es posible.*

Yo prolongo BA y CD, hasta b *y* d. *Despues vuelvo la figura BACD, de modo que A caiga en C, y C en A. Hecho esto, el ángulo BAF, que es igual á EA*b, *es igual á DCF, que es igual á ECD; luego el lado AB vuelto, caerá sobre C*d, *y el lado CD vuelto, sobre A*b. *Luego en fin, si las dos líneas rectas* b*AB,* d*CD, se encuentran en algun punto de un lado de AC, necesariamente se encontrarian en otro punto del otro lado de AC. Esta consecuencia es imposible, puesto que habria dos líneas rectas que se encontrasen en dos puntos.*

Es regla invariable que cuando dos líneas rectas b*AB,* d*CD forman con una oblícua EACF ángulos agudos iguales á* a, a', a'', a''', *y por consecuencia ángulos obtusos iguales,* o, o', o'', o''', *estas líneas son paralelas.*

(2) *Para convencerse de ello bastará observar que la línea recta* d*CD, tirada por el punto C, de manera que los ángulos* a' *y* a'' *sean iguales á los* a *y* a', *es paralela á* b*AB. Y como no se puede tirar por*

En las artes en que hay necesidad de tirar una recta paralela á otra sirven mucho estas dos propiedades de las paralelas.

Úsase para esto de una regla y de un triángulo *xyz*, fig. 31, de madera, de vidrio ó de metal, al cual llaman *escuadra de dibujar*. Este triángulo se llama escuadra porque tiene dos lados *xz*, *yz*, que forman un ángulo recto ó de *escuadra*.

Supongamos ahora que se pide que por el punto A pase una recta paralela á CD, fig. 31, se empezará colocando la escuadra *xyz*, de manera que uno de sus lados *xy* siga exactamente la direccion de CD. Despues se pondrá la regla contra el lado *xz* de la escuadra; se sujetará fuertemente con una mano la regla, ó bien se fijará esta regla sobre el plano con pesos. Entonces la otra mano conducirá la escuadra hasta que el lado *xy* venga á estar tan cerca como sea posible del punto A, supuesta la naturaleza del instrumento de que hay que servirse para trazar la línea recta AB pedida. Esta línea trazada á lo largo de *xy* será necesariamente paralela á CD, puesto que los ángulos agudos correspondientes, formados por la regla y las dos líneas AB, CD, son iguales entre sí.

Con el lado *yz* de la escuadra se pueden trazar líneas que sean perpendiculares á la regla; lo que es mucho mas pronto que tirar las perpendiculares, valiéndose de oblícuas igualmente inclinadas. Pero es necesario tener escuadras muy exactas, y esto es muy raro. Aun en las ciudades en que las artes están mas adelantadas, son muy pocos los artistas que hacen las escuadras y las reglas con la precision que exigen los buenos dibujantes ó delineadores.

Examinemos ahora la aplicacion de las propieda-

---

el punto C mas que una sola línea paralela á b*AB, será pues esta la recta en que* a, a', a'', a''' *son iguales lo mismo que* o, o', o'', o'''.

des que acabamos de indicar á la construccion y al movimiento de los cuerpos.

Teniendo, fig. 32, una figura ABCD de forma invariable, supongamos que se quiera hacerla caminar, de modo que todos sus puntos en línea recta A*mnp*... se muevan segun esta misma recta A*mnpa*.... yo digo que cualquiera otro punto B ó C, ó D, de la figura ABCD, correrá una recta B*b*, C*c*, D*d* paralela á A*a*. En efecto, la figura no mudando de forma durante su movimiento, cada punto BCD queda siempre á la misma distancia de la recta A*a*. Luego cada uno de estos describe una línea recta paralela á A*mnpa*.

La industria usa muy frecuentemente de esta bella propiedad dada por la Geometría.

Aplicacion al movimiento de las gavetas en sus cajas. Los cajones ó gavetas de las mesas, de las cómodas y de los armarios, fig. 32, están encajados y guiados en sus movimientos en un cuadro, cuyas juntas rectilíneas representan otras tantas líneas rectas paralelas A*a*, B*b*, D*d*, C*c*, cuando el cajon se saca ó se mete, si el mueble está bien ejecutado, es decir, si todas sus partes son exactamente paralelas, el cajon no dejará de ajustarse en su encaje; y en ninguna parte le impedirá en sus movimientos, porque paralelas siempre comprendidas entre paralelas, y por consecuencia iguales, representan la distancia de los diversos puntos de este cajon considerado en sus diversas posiciones.

Aplicacion al movimiento de los émbolos en las bombas. La misma esplicacion nos hace comprender como un émbolo que entra exactamente en un cuerpo de bomba, cuyo contorno está formado de líneas rectas paralelas, se mueve con exactitud sin experimentar obstáculo, cuando el cuerpo de bomba y el émbolo están ejecutados con exactitud. Cuando el émbolo sube y baja alternativamente, cada uno de los puntos de su contorno viene á ser una línea recta paralela al ege del cuerpo de bomba; todas las paralelas

descritas así deben estar enteramente situadas sobre el contorno interior del cuerpo de bomba. Sobre todo, construyendo máquinas de vapor, es cuando el menor defecto de paralelismo, y el mas ligero desvío producirian grandes inconvenientes, y una gran pérdida de fuerza.

Aplicacion al urdido y al tejido de las telas. Para urdir una tela, primero se tienden paralelamente un cierto número de hilos, los cuales se sujetan por un estremo en un orillo, y por el otro se envuelven en un rodillo. Se tienden los hilos de manera, que la parte que está desenvuelta presente los hilos como líneas rectas paralelas, y situadas en un mismo plano. A fin de que la tela que se va á fabricar no esté demasiado floja en ciertas partes y muy apretada en otras, se hace uso de un instrumento llamado peine, el cual se compone de hojuelas muy delgadas y rectas, que están puestas á igual distancia una de otra y paralelamente entre sí. Se hace pasar por cada uno de los intervalos que separan las hojuelas del peine un hilo del urdimbre, lo que arregla la separacion de los hilos. Con este doble sistema de líneas rectas paralelas de que el uno sirve de regulador al otro; cuando el peine está ejecutado con una estrema precision, se llegan á hacer tejidos de mucho largo y ancho, y de una perfecta igualdad en todas sus partes.

Sabido es á qué grado de finura y de belleza han llevado los indios la fabricacion de sus célebres cachemiras. Sin embargo, como no tienen para asegurarse del paralelismo y de la igual distancia de los hilos, medios comparables en precision á los de los europeos, les es imposible ejecutar el tejido de los chales con aquella igualdad que lo hacen los europeos, á pesar de que no haya todavía mas que veinte años que nuestros fabricantes han abierto esta nueva carrera á su industria.

Es muy importante hacer ver á los alumnos, que la superioridad adquirida en un arte muy perfecciona-

da, se debe á los medios empleados para acercarse la precision, tal como la percibe la Geometría idea en el paralelismo de las líneas rectas, representada aquí por hilos muy finos.

Frecuentemente habrá ocasion de presentar consecuencias análogas, y se verá la necesidad que hay de introducir el rigor de las concepciones y de las construcciones geométricas en el trabajo de los talleres para el adelantamiento de la industria. No nos cansemos de repetir cuán necesario es para los artistas el conocimiento de la Geometría aplicada á las artes.

Las propiedades de las líneas paralelas se ponen frecuentemente en práctica para ejecutar una figura ó ùn cuerpo exactamente iguales, á un cuerpo ó á una figura dada.

Supongamos, por ejemplo, que se trata de ejecutar una figura *abcd*, fig. 34, exactamente igual á la figura ABCD ya construida. Se tirarán las líneas B*b*, C*c*, D*d*, iguales y paralelas á A*a*, despues las líneas *ab*, *bc*, *cd*, *da*; estas serán necesariamente iguales y paralelas á AB, BC, CD, DA; y las dos figuras serán iguales.

Aplicacion á los trazados de la arquitectura civil y de la arquitectura naval. Cuando hay que dar á un pedazo de madera, piedra ó hierro un relieve que entre exactamente en la figura de una cavidad ó hueco preparado para recibir la pieza en relieve, se usa entonces de la propiedad de las paralelas de que acabamos de hacer uso. Supongamos, por ejemplo, que en la cavidad representada por ABCDEF, fig. 35, se quiera ajustar exactamente una pieza de madera XY, despues de haberla trabajado convenientemente. Para esto basta tirar las líneas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, F*f*, iguales y paralelas entre sí, despues trazar el contorno *abcdef*, y labrar la pieza XY, segun este contorno.

Empléase este medio para hacer con planchas ligeras los modelos ó plantillas de las líneas principales con que se construye un navío, segun un plano

dado. De este modo de aplicar las paralelas con toda exactitud depende la perfeccion con que se reproducen en la ejecucion las formas que ha concebido el ingeniero.

En cuanto al empleo del mismo proceder para la ensambladura de las piezas en hueco y en relieve, figura 36, que deben encajar la una en la otra; de su precision depende la solidéz del navío y la resistencia que opone á que sus partes tengan ningun juego cuando el buque esperimenta las tormentas del mar; cuyo juego, segun veremos mas adelante, es una de las causas mas peligrosas de su destruccion.

Aplicacion de las paralelas al dibujo de la Geometría descriptiva: método de las proyecciones. Ya hemos dicho algo sobre el modo de construir una figura igual á otra, valiéndonos de las paralelas. Este mismo medio ha servido para formar un modo general para representar ó describir los cuerpos: tal es el objeto de la *Geometría descriptiva.*

Sobre un plano llamado *plano de proyeccion*, como una mesa, un tablero ó una hoja de papel estendida, se traslada el objeto que hay que representar. De cada punto del objeto mismo se tira una línea recta *paralela* á cierta direccion, que se fija la primera en virtud de ciertas consideraciones. Imagínese que cada punto del cuerpo representado abandona su lugar primitivo, y viene á situarse sobre el plano de proyeccion, segun la direccion paralela que se ha elegido: la nueva posicion del punto en el plano de proyeccion es la *proyeccion del punto.*

Si se proyectan así todos los puntos de una recta, ó de una curva, formarán sobre el plano de proyeccion una recta ó una curva nueva que serán las *proyecciones de la recta ó de la curva primitiva.*

Hé aquí el género de dibujo que se usa para representar los objetos en la arquitectura civil, militar y naval, en la carpintería y en el corte de piedras, en el dibujo para la ejecucion de las máquinas, &c.

Una sola representacion de los objetos no basta; son necesarias dos para determinar exactamente su figura y su magnitud; por lo que se emplean dos planos de proyeccion, y lo mas cómodo y sencillo es suponer el uno vertical y el otro horizontal. Sobre el plano vertical se traslada ó proyecta el objeto que hay que representar, con las paralelas que son horizontales. Sobre el plano horizontal se proyecta el objeto que hay que representar, con las paralelas que son verticales.

La proyeccion horizontal es lo que se llama propiamente la *planta ó plano del objeto*. La proyeccion vertical es la que se llama el *alzado ó elevacion del objeto*.

Es de suma importancia que los alumnos se penetren desde este instante de la importancia y necesidad indispensable de conocer y practicar con exactitud el dibujo de las proyecciones, *por plantas y alzados*, de todos los objetos que hay que representar y ejecutar en todas las artes en que se debe dar á los productos una forma muy exacta, sea en virtud de modelos, sea en virtud de dimensiones ó reglas determinadas de antemano. En el discurso de esta enseñanza se darán medios de operar en los casos principales que puedan ofrecerse; pero esta indicacion no es suficiente, sino que es necesario que haya un maestro especial para que les enseñe el dibujo de las proyecciones, sus métodos y sus recursos (1).

Aplicacion del método de las proyecciones á la mecánica. No solamente las paralelas y las perpendiculares pueden servir por medio de las proyecciones para representar la forma de un cuerpo inmóvil en un momento dado, sino que tambien sirve igualmente para representar el camino que ha seguido, ó que debe seguir cada uno de sus puntos cuando un cuerpo ha de adquirir un movimiento cualquiera. Esta nueva aplicacion de la Geometría es de la mas alta importancia para la mecánica. Con ella podemos representar las líneas que no estan realmente figuradas en el espacio, y con ella podemos fijar durablemente impresiones, cuya naturaleza consiste en desaparecer desde el instante mismo que sigue al de su creacion.

(1) *Véase aquí como en el Real Conservatorio de Artes de Madrid se ha establecido sábiamente el curso de* delineacion *para este objeto y otros de mucha importancia N. T.*

Supongamos, por ejemplo, que yo tiro una bala de fusil ó de cañon hácia un objeto dado. El centro de esta bala corre una cierta línea que no deja ninguna señal en el espacio, ni antes ni despues del tiro de la bala; sin embargo, se puede representar sobre un plano esta línea tal como fue, ó tal como será. Esta representacion nos servirá en muchos casos; por ejemplo, para darnos cuenta del efecto del tiro de una batería sobre una fortificacion. Segun que esta línea dirigida sobre la cresta de las fortificaciones entre en el espacio en que se hallan los defensores, ó pase por encima de este espacio, á tal distancia que no pueda tocar á los defensores: la batería tendrá ventaja ó desventaja para el sitiador, y habrá ó no peligro para los sitiados que estan detrás de la muralla. (Véase la leccion 14.)

Represéntase pues la línea que corre el centro de la bala sobre los planos de proyeccion que señalan las posiciones respectivas y los relieves de la batería y de las fortificaciones, para juzgar lo que se debe esperar ó temer de los efectos de esta batería.

Represéntase igualmente por líneas la série de puntos que corre el centro de la luna alrededor de la tierra, el centro de la tierra, y de los demas planetas y de los cometas alrededor del sol &c. El conocimiento de las líneas así corridas por los astros de nuestro sistema planetario pertenece á la clase de descubrimientos mas preciosos que ha hecho el entendimiento del hombre. Han sido menester muchos millares de años para adquirirlo.

Las máquinas que se ejecutan para las necesidades de la sociedad, y para las operaciones de la industria, estan fabricadas con el intento de que ciertas partes suyas operen movimientos determinados. No basta representar las partes de cada máquina en una posicion particular, sino que hay tambien que representar los movimientos de estas partes. Consíguese esto tambien con el método de las proyecciones con paralelas y perpendiculares. Por medio de esta representacion vemos claramente los efectos que produce la forma misma que tienen las diversas partes de las máquinas cuando estan en movimiento.

Por aquí se descubre ya que la teoría de las paralelas y las perpendiculares, tan fácil y tan sencilla como parece, tiene sin embargo un sin número de aplicaciones importantes, sea para figurar y fabricar los objetos de todas formas, los muebles, los edificios y las máquinas, sea para representar el estado estable de los cuerpos y las diversas circunstancias de su movimiento. Importa, pues, mucho familiarizarse con el medio de representacion que suministra á la industria.

Una de las aplicaciones mas útiles de las líneas paralelas que se ha hecho es la de reducir á la medida de las líneas rectas paralelas la figura de las líneas curvas.

Siendo dada una línea curva cualquiera MABCDN, fig. 37, se la refiere á una línea recta principal ó eje *mn*, por medio de otras líneas rectas *paralelas* A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, &c. Ordinariamente trázanse estas últimas á igual distancia unas de otras.

Aplicacion al trazado de las curvas. La ventaja de este trazado geométrico consiste en que permite, si puedo espresarme así, el *escribir* y el *contar* la figura de las líneas curvas aunque sean las menos regulares. La construccion de las naves ofrece un ejemplo notable.

Ejemplo que ofrece la construccion de las naves. La rapidez de la marcha de un navío, á igualdad de circunstancias depende de la forma conveniente de la parte sumergida en el agua. Es necesario que esta forma

sea perfectamente continua, y bien ejecutada segun las dimensiones determinadas por el ingeniero; por lo que se emplean los métodos geométricos mas exactos para representar y construir dicha parte de los buques. Se ha recurrido al método de las paralelas y las perpendiculares. Todos los navíos que construimos tienen su lado derecho llamado *estribor* perfectamente semejante al lado izquierdo llamado *babor*. Se toma para figurarlos una línea horizontal MN, fig. 38, que va de la popa á la proa; sobre esta línea recta dividida en partes iguales MA, AB, BC...., se levantan las perpendiculares y sobre estas perpendiculares se señalan los puntos que indican la magnitud de las líneas de agua.

Supóngase que el navío sin inclinarse á un lado ni á otro se hunde gradualmente en el mar, y que segun va bajando se señala sobre su superficie esterior la línea del contorno del agua: á esto llaman las *líneas de agua*. La continuidad de estas líneas decide antes que todo de la perfeccion de las formas de una nave. Estas curvas estan determinadas como acabamos de decirlo por los semi-anchos señalados á derecha y á izquierda, del eje sobre las paralelas. Cuando estos semi-anchos estan indicados en números por cada línea de agua ó por cada paralela, siempre se puede ejecutar el dibujo de la carena y por consiguiente la nave.

Ejemplo que ofrece el trazado de los caminos y de los canales. Sea la línea MN, fig. 39, tomada por eje la del nivel de las aguas del canal, ó cualquiera otra línea paralela á este nivel. Se tiran las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*...., desde esta línea al terreno cuya figura esta determinada por la curva que pasa por los puntos *a*, *b*, *c*, *d*. Para determinar las alturas M*m*, A*a*, B*b*, C*c*, se usa un instrumento llamado *nivel* que describiremos al tratar de las máquinas hidráulicas.

Formanse luego lo que se llama los *perfiles al través* tirando por cada punto A, B, C, D...., horizontales perpendiculares á MN y tomando cada una de estas horizontales por nuevo eje. De este se bajan perpen-

diculares al terreno; se mide lo largo de ellas; y despues se forma una figura para cada nuevo eje con las perpendiculares y la curva del terreno que las corresponde.

Estas operaciones son indispensables para conocer con exactitud la cantidad de tierra que es necesario escavar en los parages mas altos á fin de transportarla á los parages mas bajos, y transformar la figura primitiva del terreno en la que conviene, sea al camino, sea al canal que se quiere trazar. En fin las mismas alturas dan el medio de efectuar con prontitud y facilidad los cálculos necesarios para evaluar las cantidades de tierra que hay que sacar y que echar; lo primero se llama *desmonte*, y lo segundo *terraplen*.

Cuando se quiere terminar exactamente la figura del fondo de un lago, de un rio, de un puerto, de una rada, se divide la superficie con dos series de líneas horizontales, paralelas, igualmente distantes. Y las de una serie son perpendiculares á las de la otra. Esto hecho se baja de cada punto en que las paralelas tiradas en un sentido estan cortadas por las paralelas tiradas en otro, una perpendicular que va hasta el terreno. Si se hacen pasar líneas curvas por la estremidad de las perpendiculares tiradas de una misma horizontal, se forma un perfil del fondo del lago, del rio, de la rada, &c. de este modo se sacan, sea á lo largo, sea al traves todos los perfiles necesarios para determinar la figura de este fondo.

En lugar de seguir este medio de representar la figura de un terreno cubierto ó no cubierto por las aguas, se prefiere otras veces el uso de curvas tales que las alturas verticales sean iguales para cada una de ellas; de manera que entonces se forma una serie de *curvas horizontales*. Supónese ordinariamente que las curvas que se siguen estan á la misma distancia unas de otras, midiendo verticalmente esta distancia. Por consiguiente en proyeccion vertical, es decir *en elevacion* todas estas secciones horizontales estan representadas por paralelas á

igual distancia unas de otras; lo que simplifica un sin número de operaciones. Este medio de representacion tiene la gran ventaja de mostrar á la simple vista sobre un plano, tal como un pliego de papel, la figura completa del terreno en sus diversas partes.

La determinacion de esta figura no solamente es útil á la hidrografia, es decir á la descripcion de los lugares cubiertos ó bañados por las aguas, sino que tambien sirve al topógrafo para describir con precision la forma exacta y detallada de los valles, montañas &c. Sirve al ingeniero militar como al ingeniero de puentes y calzadas para los proyectos de caminos públicos y fortificaciones.

Cuando se quiere construir un acueducto ó un puente, los pilares de este puente ó de este acueducto suben á la altura de una línea de nivel determinada MN, fig. 40, divídese ésta en partes generalmente iguales MA, AB, BC, CD.... De cada punto de division se bajan las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*...., hasta el terreno: estas líneas señalan la altura que han de tener los pilares del puente ó del acueducto.

No me estendere mas sobre las aplicaciones innumerables que pueden hacerse de esta representacion de las formas de la estension con el auxilio de las paralelas. Se debe ver toda la importancia de este método, su facilidad, su sencillez, su rapidez; y es necesario familiarizarse con él con frecuentes ejercicios dibujando rigurosamente un gran número de objetos referidos á los ejes y á las paralelas. Es NECESARIO QUE ESTE GÉNERO DE DIBUJO SE ESTIENDA SUCESIVAMENTE Á TODOS LOS TALLERES.

Se puede consultar con fruto en primer lugar la obra muy elemental de Mr. Francoeur sobre el dibujo lineal, en seguida la obra de Mr. Lacroix, *sobre los planos y las superficies curvas* y la geometría descriptiva de Mr. Monge. MM. Achett y Vallée han dado tambien sobre esta materia muy buenos tratados en los que se encuentran cosas escelentes que se buscarian en vano en otra parte.

LECCION TERCERA.

Del círculo.

Un círculo es una superficie plana, cuyo borde, llamado *circunferencia*, tiene todos sus puntos á igual distancia de un punto, el cual llaman el *centro*.

Todas las líneas rectas tiradas desde el centro á la circunferencia son iguales entre sí, porque miden distancias iguales. Estas líneas rectas se llaman *radios*. Luego todos los radios de un círculo son iguales entre sí.

Cuando dos radios estan directamente opuestos el uno á la derecha y el otro á la izquierda del centro, la línea recta única que forman es lo que se llama un diámetro del círculo.

* Así en el círculo ABDE, fig. **1**, en que C es el centro CA, CB, CD, CE, son los radios todos iguales entre sí. Si los radios CA, CD forman una línea recta ACD, esta línea es un diámetro del círculo. *

Cada diámetro DA, fig. **1**, divide el círculo en dos partes iguales.

* Para convencerse de ello basta doblar la parte DAB sobre la parte DAE, haciendo girar DAB alrededor del diámetro DA, como si fuese una charnela. Si algun punto del contorno DAB cayese dentro del contorno DAE, estaria mas cerca del centro; si algun punto de DAB cayese fuera del dicho contorno estaria mas léjos del centro; pero esto no puede ser, porque todos los puntos de la circunferencia ABDEA estan á igual distancia del centro. Luego el contorno DBA se aplica en toda su estension sobre DEA y las dos partes del círculo separadas por el diámetro DA son iguales entre sí. *

Se llama cuerda toda recta *mn*, fig. 2, que se ter-

mina por una parte y otra en la circunferencia de un círculo.

Se llama *arco* de círculo cualquier parte *mnq* de la circunferencia. Se llama *flecha ó sagita* la parte *pq* del radio C*pq* perpendicular á la cuerda; la cual parte está comprendida entre esta cuerda y el arco.

Se han tomado estas denominaciones del uso que hacian los antiguos de una madera que tenian tirante con una cuerda, y de manera que formaba una parte de circunferencia á que llamaban *arco*, para arrojar flechas situadas á la mitad de la cuerda, y en una direccion perpendicular á ella. Aquí sucede que la aplicacion ha sido anterior á la ciencia y le ha suministrado los nombres.

El *radio Cpq*, fig. 2, *perpendicular* á la cuerda *mn*, *divide el arco y la cuerda en dos partes iguales.*

* En efecto tiremos los radios C*m*, C*n* que son oblicuas iguales respecto de la perpendicular C*p*. Luego **1.º** *mp* = *np*. Las cuerdas *mq*, *nq* tambien son oblicuas iguales, y si se dobla C*qn* sobre C*qm*, el punto *n* caerá sobre *m* y el arco *nsq* sobre *mrq*; puesto que ningun punto del primer arco puede caer dentro ni fuera del segundo, sin estar mas cerca ó mas léjos del centro C. Luego 2.º los dos arcos *mrq*, *nsq* son iguales. *

Aplicaciones al dibujo lineal ó delineacion. La propiedad que acaba de demostrarse suministra aplicaciones muy útiles en el arte del dibujo y en casi todas las artes en que hay que tomar y combinar medidas exactas.

* Desde luego sirve para dividir un arco de círculo *m q n*, fig. 4, en dos partes iguales. Para esto se toma un compás que se abre suficientemente; esto es, mas que de la mitad de *m n*, y poniendo en *m* una de las puntas del compás, se describe con la otra un arco de círculo *r s t*; poniendo despues una punta del compás en *n*, se describe con la otra otro arco *vsu*, teniendo cuidado de que el compás no se abra ni cierre en toda la operacion. El punto *s* en que se cruzan los dos círculos estará á igual distancia de *m* y *n*. Luego estará

en la perpendicular á *m n* que pasa por el medio de esta recta y por el centro del círculo. Esta misma recta dividirá la cuerda *m n* lo mismo que el arco *m q n*, en dos partes iguales. *

* Sino se conociese la posicion del centro bastaria trazar del lado de este centro dos arcos *a b c*, *d b e* con una misma abertura de compás, el primero teniendo *m* por centro, y el segundo *n*; el punto *b* estaria como el punto *s* en la perpendicular que divide en dos partes iguales la cuerda *m n* y su arco *m q n*. *

Con esta construccion siempre que conozcamos tres puntos *m*, *n*, *o*, fig. 5, de la circunferencia de un círculo, podremos determinar la posicion del centro, la magnitud del radio, y por consecuencia trazar la circunferencia misma.

* Basta para esto tirar segun lo que acabamos de indicar, 1.° por el medio de *mn*, *qa* perpendicular á *mn*; 2.° por el medio de *no*, *rb* perpendicular á *no*. Del punto C en que se encuentran las perpendiculares C*q*, C*r*, tiremos las oblicuas C*m*, C*n*, C*o*, que todas serán iguales. Así C*m*, C*n*, C*o* serán tres radios del círculo, cuyo centro se busca. *

Cuando, fig. 6, las cuerdas AB, DE, FG.... de un círculo son paralelas, los arcos AD y BE, DF y EG...., que comprenden *son iguales.*

* Para demostrarlo tiremos del centro C el radio C*lmnp* perpendicular á todas las cuerdas, y resulta que cortará á cada una de ellas en dos partes iguales. Ademas comparada la longitud de los arcos que corresponden á estas cuerdas: El arco *p*A igual *p*B, *p*D igual *p*E, *p*F igual *p*G; lo que exige que el arco AD sea igual á BE; DF igual á EG. *

Una línea recta X*p*Y, fig. 6, perpendicular al radio C*p* del círculo, y tirada por el estremo de este radio, cae enteramente fuera del círculo á que no toca mas que en un punto *p*. Esta se llama *tangente* del círculo; y ninguna otra recta que salga del punto *p* puede pasar entre el círculo y su tangente X*p*Y.

* En efecto siendo el radio perpendicular á la recta X*p*Y, el pie *p* de esta perpendicular está mas cerca del centro C situado en esta perpendicular que cualquiera otro punto X ó Y; puesto que la distancia de cada uno de los puntos X Y...., al punto C tendria por medida una oblicua necesariamente mas larga que la perpendicular C*p*. Luego todos los puntos de la recta X*p*Y excepto *p* caen fuera del círculo. *

Las artes sacan un gran partido de esta propiedad que tiene el círculo respecto de las rectas que son *tangentes* á él.

Se puede hacer girar el círculo alrededor de su centro C suponiéndole fijo. La tangente quedando tambien fija en este movimiento: 1.° el círculo no cortará á XY; y 2.° siempre tocará á XY en un punto *p* que estará á una distancia del centro C igual al radio C*p*. Por consecuencia cuando una recta toca á un círculo en un punto, si el centro del círculo está fijo en un eje, se podrá hacer girar dicho círculo, sin que se aparte nunca de la dicha línea recta ni tampoco la impela.

Aplicacion á tornear un cuerpo movible por medio de una herramienta fija. El tornero se vale de esta propiedad para cortar una superficie plana dándole un contorno circular. Hace girar el plano alrededor de un punto fijo C considerado como centro del círculo; dirige en seguida una herramienta cortante segun la tangente XY; el corte de la herramienta obra en el punto *p*, y todas las partes del plano que corte la herramienta estarán á una distancia mayor que C*p*; todos los puntos del contorno cortados de este modo estarán á la distancia C*p* del centro: luego este contorno es el de un círculo.

Aplicacion á la configuracion de las piedras de amolar para afilar las herramientas ó pulimentar superficies.

En la misma propiedad esta fundada la construccion de las piedras que sirven para afilar las herramientas y pulimentar las partes rectilíneas de la su-

perficie de los productos de industria. Se tiene asegurada sea con la mano, sea con un aparato cualquiera, la pieza que hay que afilar ó pulimentar, de manera que esté en contacto con una piedra de forma circular. Si el centro de la piedra está bien fijo, y su circunferencia bien exacta, cuando ésta dé vueltas alrededor, la superficie de ella estará siempre en contacto con los objetos que se van á afilar ó pulimentar.

Cualquiera otra figura que no fuese el círculo no tendria esta propiedad, y dándole vueltas habria momentos en que se separaria de las piezas que se tenian fijas, y otras veces las empujaria.

En lugar de suponer el círculo movible y la tangente XY fija, podemos suponer lo contrario; fijo el círculo y movible la recta XY. Si ponemos la condicion de que esta recta ha de estar siempre á una distancia del centro igual al radio, no cesará de tocar á la circunferencia del círculo.

Aplicacion al torneado de cuerpos fijos. Se emplea este medio para cortar circularmente cuerpos inmóviles. En este caso el instrumento ó herramienta es el que dá vueltas alrededor del centro; una cara recta de la herramienta está representada por la tangente XY, y el corte lo está por el punto *p*.

Se combina ademas de un modo diferente el movimiento del círculo con la posicion de sus tangentes.

Aplicacion á la rodadura. Supongamos que la tangente XY está inmóvil y hagamos rodar el círculo sobre ella, de manera que cada parte de la circunferencia descanse sucesivamente sin resbalar hácia atrás ni hácia adelante sobre una nueva parte de la tangente, y se tendrá el movimiento que se *llama rodadura*, que es de la mayor importancia en las artes.

En este movimiento la recta XY no dejará de ser tangente al círculo, puesto que siempre tocará á la circunferencia en un punto solo. Luego el centro del círculo estará siempre apartado de la línea XY á una distancia igual al radio *Cp*. Así en la rodadura efectuada

sobre una línea recta XY el centro del círculo que rueda se mueve segun otra línea recta paralela al camino XY. Por consiguiente si esta recta es horizontal el centro del círculo andará igualmente una línea horizontal.

Si cualquiera otra curva se hiciese rodar del mismo modo sobre una recta horizontal un punto central ó no, unas veces subiria y otras bajaria; y el transporte efectuado por esta rueda *no circular*, ni tendria regularidad, ni suavidad: tal es la razon por que se da la figura de un círculo á todas las ruedas de los carruages destinados para transportar viageros ó efectos.

Aplicacion á los movimientos paralelos. La propiedad del círculo que consideramos en este momento suministra un medio muy sencillo y muy fácil de hacer mover un punto paralelamente á una recta dada; basta para ello sujetar este punto al centro de un círculo que se hará rodar sobre su tangente.

Tiremos la línea *xy*, fig. 6, paralela á XY, á la distancia de dos radios *Cp* ó del diámetro del círculo que es *pCq*. Entonces *xy* pasará por el estremo *q* del diámetro *pq*, y será como XY tangente al círculo. Si ahora se hace rodar el círculo sobre X*p*Y, no cesará de tocar á *xqy*, porque la distancia de las dos paralelas siempre es la misma.

Aplicacion á la construccion de las máquinas. Cuando se quiere que se mueva con mucha exactitud una regla, un bastidor rectilíneos, paralelamente á una línea recta dada, se toman unos rodetes ó rodillos de un mismo diámetro, y de figura circular muy exacta; se ponen entre la recta que sirve de basa, y la regla ó bastidor que se ha de mover. Despues no hay que hacer mas que tirar ó empujar *tangencialmente* á los rodillos ó rodetes, la regla ó bastidor, segun lo requiera la máquina de que sean parte.

Ya se puede observar qué variedad de medios suministra la Geometría á las artes para describir ó construir círculos con las líneas rectas, y líneas rectas con los círculos; para producir los movimientos rectilíneos con

los movimientos circulares, y los movimientos circulares con los movimientos rectilíneos. A los profesores toca esplicar bien á los discípulos el espíritu de estas aplicaciones.

Despues de haber comparado los círculos con las rectas, comparemos los círculos entre sí.

Supongamos que dos círculos A, B, fig. 7, esten situados de manera que la distancia AB de sus centros sea igual á la suma AO mas BO de sus radios. Es evidente que el punto O estará á la vez sobre las dos circunferencias. Ademas, ningun otro punto P puede estar á la vez sobre estas dos circunferencias (1).

Por consecuencia los dos círculos son *tangentes* uno á otro.

Aplicacion para transmitir el movimiento circular de un eje á otro. Se puede hacer rodar el primer círculo, fig. 7, sin cesar de tocar al segundo; supuesto fijo, y tambien supuesto movible y rodando sea en el mismo sentido que el primero, sea en sentido contrario; sin que en este movimiento los dos círculos cesen de tocarse ni cargue uno sobre otro.

Las artes emplean frecuentemente esta propiedad geométrica para poner en movimiento un círculo por otro: sea valiéndose solo del rozamiento de las circunferencias, sea herizándolas de dientes de igual grueso y situados á la misma distancia. Debe observarse que entonces si uno de los círculos rueda de izquierda á derecha, el otro rueda de derecha á izquierda, esto es, se mueven en sentidos contrarios. Esta oposicion de movimientos está representada por flechas en la fig. 7.

Si hubiera tres círculos en contacto A, B, C, fig. 7, de manera que el primero hiciese girar al segundo y

(1) *En efecto, si se tiran las líneas rectas AP, BP, siempre resultará que la línea recta AO mas BO, es mas corta que la línea angulosa AP mas BP. Luego AP y BP no pueden ser iguales á los radios AO y BO.*

este al tercero, el segundo girando en sentido contrario al primero, y el tercero en sentido contrario al segundo, el tercero y primero girarán por consecuencia en el mismo sentido. Luego *son necesarios tres círculos en contacto para hacer pasar en el mismo sentido un movimiento circular de un centro á otro.*

De las correas que rodean á los círculos. Cuando se quiere transmitir un movimiento circular á una distancia bastante considerable, en lugar de emplear muchos grandes círculos ó multiplicarlos demasiado, se usan dos de ellos rodeados de una correjuela. Esto se puede hacer: 1.° sin cruzar las correjuelas como en la *fig. 8.*; 2.° cruzándolas como en la fig. 9. Estas correjuelas estan tirantes de modo que las partes *mn, pq,* que no estan en contacto con los dos círculos esten en línea recta. Podemos hacer girar cada uno de estos dos círculos sin que la longitud ni la direccion de las partes circulares *pAm* y *qBn* cambien, ni tampoco la longitud y direccion de las partes rectas *mn, pq.* Luego si en el primer momento, la adherencia de la correa sobre las circunferencias es suficiente para que haciendo andar un círculo la correa siga el mismo movimiento y lo transmita al otro círculo, este movimiento se transmitirá sin dificultad y siempre del mismo modo á medida que se haga andar al primer círculo.

Si por el uso ó por efecto de las variaciones de calor y humedad de la atmósfera la correa se alargase, sería necesario emplear otro círculo D, fig. 10, que apartando una parte rectilínea *pq*, la pondria en una posicion *pr, rq,* en que estaria todavia tirante á pesar de lo que se habia alargado. Basta para esto que la diferencia de longitud entre la recta *pq* y la parte *prq,* que forma codo, fuese igual á lo que se habia alargado la correa. Se hace un uso frecuente de este medio en la construccion de las máquinas.

Una diferencia que debe observarse con atencion entre los dos géneros de correas cruzadas ó no cruzadas que pasan del un círculo al otro, es que con las cor-

reas cruzadas, fig. 9, los dos círculos andan en sentidos contrarios; siendo así que con las correas sin cruzar, fig. 8 y 10, andan en el mismo sentido.

En el discurso de estas lecciones se verán otras muchas aplicaciones del movimiento de las líneas rectas y de los círculos combinados para satisfacer á las necesidades de las artes.

Del movimiento de un círculo dentro de otro. Si en una superficie plana se corta un círculo, se tendrá en la parte cortada una circunferencia en *relieve*, y sobre el resto del plano una circunferencia *en hueco.* Hagamos rodar alrededor de su centro el círculo cortado; todos los puntos de su circunferencia quedarán siempre á la misma distancia del centro, y estarán siempre en contacto con algun punto de la circunferencia en hueco labrada en el plano. Luego la circunferencia en relieve, cuando ruede, no cesará de tocar en todos sus puntos á la circunferencia en hueco.

Solo el círculo goza de esta propiedad. En efecto cualquiera otra figura que rodase alrededor de un punto, tendria las partes del contorno mas ó menos distantes de este punto, y estas partes ya saldrian del contorno tallado en hueco sobre el plano, ya no alcanzando este contorno dejarian un vacío entre ella y él.

Siempre que haya necesidad de cerrar un espacio sobre un plano, en tanto que cierta parte de este plano deba rodar sobre sí misma, debe por consecuencia darse á esta parte la figura de un círculo. Tal es la razon de dar una figura circular á las espitas, á los tapones de las botellas, de los frascos &c.

Aplicacion á las cajas de vapor. En la construccion de las máquinas de vapor se hace un uso ingenioso de esta propiedad que tiene el círculo de girar sobre sí mismo, sin que ningun punto cese de tocar una circunferencia hueca que lo abraza. Esplicaremos este uso cuando describamos las cajas circulares de vapor.

Division del círculo y su aplicacion á la medida de los ángulos. Antes de esplicar esta division daremos á conocer un principio esencial.

Si dos arcos de un círculo AMB, DNE, fig. 11, son iguales entre sí, las cuerdas AB, DE, que pertenecen á estos arcos, son iguales entre sí (1). Recíprocamente si las cuerdas AB, DE, fig. 11, fueren iguales, si se pone la segunda cuerda sobre la primera, los dos arcos AMB, DNE se confundirán en toda su estension y serán iguales. Luego si trazamos en un círculo, fig. 12, varias cuerdas AB, BC, CD, DE...., todas iguales entre sí, tambien lo serán los arcos correspondientes; y por consecuencia quedará dividida la circunferencia en tantas partes como cuerdas hayamos trazado.

De los medios mas sencillos de dividir el círculo.

1.° En *dos* partes iguales: basta tirar por el centro un diámetro AB, fig. 13.

2.° En *tres* partes iguales: hay que dividirle en seis, fig. 15, y tomar las divisiones de dos en dos.

3.° En *cuatro* partes iguales: hay que tirar un diámetro DE, fig. 13, perpendicular al AB (2).

4.° En *cinco* partes iguales, fig. 14, se dividirá la circunferencia en diez partes iguales y se tomarán despues de dos en dos (3).

---

(1) *Para demostrarlo pongamos el arco DNE sobre AMB, y el punto D sobre el punto A. Como los dos arcos tienen un mismo centro se aplicarán exactamente el uno sobre el otro. Luego el punto E caerá sobre el punto B. Luego la línea recta ó cuerda DE se confundirá con la cuerda AB.*

(2) *Esta operacion se puede ejecutar inmediatamente tomando una abertura de compás mayor que el radio, y describiendo, con esta abertura como radio, del punto A como centro, los dos arcos* mFn, pGq; *del punto B como centro, los arcos* rFs, tGn; *la línea recta FDCEG es la perpendicular buscada.*

(3) *Para dividir el círculo en diez partes iguales se parte el radio en dos AM, MC, tales que la mayor*

5.° En *seis* partes iguales, fig. 15; hay que tomar por cuerda el radio del círculo.

La perpendicular tirada por el medio de cada cuerda dividirá en dos partes iguales el arco que subtende, y dará el medio de dividir la circunferencia del círculo en *ocho* partes iguales, fig. 13, si se opera en la division en cuatro partes iguales de dividirla en *doce*, fig. 15, si se opera en la division en seis partes iguales &c.

El *quinceavo* de la circunferencia es igual al *sesto* menos el décimo.

Estas operaciones tan sencillas se ofrecen continuamente en el trazado de las máquinas, y de los productos de la industria, y es esencial que los artistas se familiaricen con ellas.

Despues de haber indicado los métodos rigurosos que la geometría enseña, daremos un método de aproximacion que servirá en muchos casos.

Suponiendo el radio de un círculo dividido en 10000 partes, véase aquí cual es, despreciando las fracciones de unidad la longitud de la cuerda que subtende una porcion de la circunferencia igual.

A la semi-circunferencia.	20000	Al séptimo.	8672
Al tercio.	17232	Al octavo.	7654
Al cuarto.	14145	Al noveno.	6840
Al quinto.	11746	Al décimo.	6180
Al sesto.	10000	Al onceavo.	5524
		Al doceavo.	5176

Con esta pequeña tabla se hallará muy fácilmente

MC contenga tantas veces á la menor A como el radio á la mayor. La parte mayor AM será la cuerda que puesta diez veces de seguida sobre la circunferencia hará completamente la vuelta. La demostracion de este método, y el de la division del círculo, está fundada en las propiedades de los triángulos.

la abertura de compás necesaria para dividir el círculo en tantas partes iguales como se quiera desde la mitad hasta la dozava.

En seguida por el medio que hemos dado para tomar la mitad de un arco, se tendrá inmediatamente la abertura de compás que corresponde.........

al	14vo,	16vo,	18vo,	20vo,	22vo,	24vo,	28vo,	&c.
ó dos veces	7	8	9	10	11	12	14,	&c.

Hemos hecho ver la facilidad con que se divide un arco en dos partes iguales; pero no sucederia lo mismo si quisiéramos dividirle en tres partes iguales, pues los geómetras han buscado en vano un método riguroso para ello.

Aplicacion de los arcos de círculo á la medida de los ángulos. Los ángulos son susceptibles de aumento y diminucion, por lo que podemos tomar uno de ellos por unidad de medida, y representar todos los demas por cifras que espresen el número de veces que comprenden este ángulo ó sus subdivisiones (véase la leccion primera).

En lugar de tomar un mismo ángulo ACB, fig. 16, por unidad de medida se ha juzgado mas conveniente tomar el arco AB comprendido entre los lados del ángulo y descrito desde el punto C como centro.

Es fácil ver que si se trazan varios radios CA, CB, CD y CE... á tales distancias que los ángulos ACB, BCD, DCE.... sean iguales, podrán ajustarse estos ángulos los unos sobre los otros, y en este caso sus arcos AB, CD, DE.... aplicándose en toda su estension los unos sobre los otros, serán iguales.

Si se toman dos, tres, cuatro de los ángulos iguales á la unidad para formar un ángulo único, hay que tomar tambien dos, tres, cuatro veces el arco que les corresponde para tener el que abraza el nuevo ángulo. Por consecuencia el mismo número representará la cantidad de veces que el nuevo ángulo, cualquiera que sea, contiene á la unidad de medida de los ángulos, y la cantidad de veces que el arco correspondiente al nuevo

ángulo contiene la unidad de medida de los arcos.

Sin alterar estos números se pueden tomar indiferentemente las medidas de ángulos ó de arcos; pero se ha encontrado que es mas cómodo usar de los arcos; y he aquí como se ha procedido.

Se ha dividido el círculo en cuatro partes iguales, las cuales dan por consecuencia cuatro cuartos de circunferencia, sirviendo de medida á los cuatro ángulos rectos que abrazan todo el espacio alrededor del centro C.

Despues de esto se ha dividido cada cuarto en *noventa* partes iguales á que han llamado *grados.*

La circunferencia del círculo contiene pues cuatro veces 90 ó 360 grados. Esta division parece bastante rara á primera vista y no concuerda enteramente con nuestra division en 100, en 10000 &c. sin embargo presenta algunas ventajas &c. principalmente es la de prestarse á muchas divisiones en partes iguales espresadas por números redondos.

Así la *semi*-circunferencia es igual á 180 grados.

El tercio,	*el cuarto,*	*el quinto,*	*el sesto,*	*el octavo,*
120	90	75	60	45
el doceavo,	*el quinceavo,*	*el veinteavo,*	*el veinticuatroavo,*	
30	24	18	15	
el treintavo,	*el treinta y seisavo....*	*de la circunferencia.*		
12	10	*....grados.*		

No llevaremos mas adelante esta indicacion pues bastará lo dicho para que los artistas comprendan la ventaja de la antigua division del círculo en 360 grados.

A fin de medir las partes de ángulo menores que un grado, se divide el grado en 60 partes iguales que se llaman *minutos.*

Para tomar medidas mas delicadas todavia, se divide el minuto en 60 *segundos,* el segundo en 60 *terceros,* y el tercero en 60 *cuartos,* &c.

La circunferencia del círculo contiene 21.600 minutos, ó 1.296.000 segundos ó 77.760.000 terceros, ó 4.665.600.000 cuartos (1).

Aplicacion á la geografía. Los geógrafos han hecho una aplicacion muy importante de la division del círculo por grados, minutos, segundos &c. para medir la superficie de la tierra.

Han observado que las líneas trazadas de norte á sur, del mismo modo que las trazadas de oriente á occidente, son con corta diferencia círculos, y los han dividido en grados, minutos, segundos &c.

He aquí cual es la longitud de estas partes, segun la antigua division del círculo.

La circunferencia de la tierra medida sobre un meridiano es de (2). . . . . . 40.000.000. metros.

1. grado es igual á. . .	111.111. metros.
1. minuto.	1.852. metros.
1. segundo.	34. metros.
1. tercero.	½. metro algo mas.

Segun la nueva division del círculo.

1. grado es igual á. . .	100.000. metros.
1. minuto.	1.000. metros.
1. segundo.	10. metros.
1. tercero.	1. decímetro.
1. cuarto.	1. milímetro.

Aplicacion de la division del círculo á la construccion de las máquinas.

La division de la circunferencia del círculo en partes iguales es una operacion indispensable en un gran número de artes, y sobre todo en la fabricacion de las

(1) *Para indicar de un modo abreviado los grados, los minutos, los segundos, los terceros, los cuartos, se escribe* °, ′, ″, ‴, ⁗, *encima de la cifra indicando estas partes del círculo.*

Asi 15°, 45′, 53″, 37‴, 21^{IV}, *quiere decir* 15 *grados,* 45 *minutos,* 53 *segundos,* 37 *terceros,* 21 *cuartos.*

(2) *Véase la nota al fin de esta leccion.*

máquinas; por ejemplo para trazar las ruedas dentadas necesarias en los engranages, y los cilindros acanalados para la filatura mecánica del algodon, lana, cáñamo &c. Segun se ejecutan estas operaciones con mas ó menos cuidado, los movimientos trasmitidos por el engranaje lo son con mas ó menos facilidad: solo la precision geométrica puede impedir los resaltos, las desigualdades, y las pérdidas de fuerza que acompañan siempre á la irregularidad é inexactitud del movimiento de las máquinas.

Seria muy importante que nuestros fabricantes no empleasen jamás ruedas dentadas y cilindros acanalados sin verificar, con *mucho cuidado*, si los dientes y las canaladuras dividen la circunferencia en partes sensiblemente iguales. Estas verificaciones harian que los fabricantes de máquinas fuesen mas rigurosos en sus métodos; la indústria francesa ganaria grande economía de fuerzas trasmitidas; y los productos de nuestra industria, que piden mucha perfeccion en la mano de obra, adquirirán nueva superioridad.

Instrumentos propios para medir los ángulos. Para medir los ángulos se usan varios instrumentos en los cuales está señalada la division del círculo en grados y aun en subdivisiones de grados.

El transportador es el mas sencillo de estos instrumentos: consiste en un semicírculo de cobre ó cuerno, en cuya circunferencia se señalan los grados. Si el instrumento es de cobre la parte *mnp*C está cortada: y el centro C está señalado con una muesca; ademas las muescas *m*, *p*, son otros dos puntos del diámetro *m*C*p* trazado sobre un plano, y coincide exactamente con el borde *m*C*p* de la parte recta que representa un diámetro.

En el transportador de cuerno no hay necesidad de estas muescas, pues deja ver el dibujo al traves de su grueso.

El *transportador* se llama así porque sirve para tomar la abertura de un ángulo XOY, y llevarla á

otra posicion, cuando se dá el vértice y un lado del nuevo ángulo.

* Si por ejemplo se quiere trazar una línea CY que pase por un punto dado O de CX, y forme un cierto ángulo, por ejemplo de 55° grados con CX, se pondrá el diámetro *m*C*p* sobre CX, y el punto C sobre el punto O. Señálese despues de manera que toque al contorno graduado un punto H que corresponda á 55°. La línea tirada por C y por H es la que forma con OX el ángulo de 55 grados. *

El *graphometro* es un instrumento que usan los agrimensores y es semejante al transportador. Compónese igualmente de una semi-circunferencia, pero es mucho mayor. Está colocado en un pie de tres piernas. Tiene á las estremidades de su semi-circunferencia graduada unas placas pequeñas de laton que tienen una abertura recta y perpendicular al plano del círculo. Por medio de estas dos aberturas que llaman *alidadas* y situándose detrás de la una y mirando al traves de la otra se dá vueltas al graphometro hasta que esté en la direccion precisa de un objeto determinado. Ademas hay un diámetro movible alrededor del centro que tiene tambien dos alidadas; se dá vueltas á este diámetro hasta el punto en que mirando por sus dos aberturas se vea un segundo objeto. De esta manera se mide el ángulo formado por dos líneas rectas que pasan por el centro del graphometro, y respectivamente por dos objetos determinados. Obsérvese en la graduacion del instrumento el número de grados que separan los dos diámetros y éstos señalarán el ángulo buscado (1).

Hay otros instrumentos que sirven para medir los ángulos, pero no tienen mas que el cuarto de un círculo

(1) *Será muy conveniente que el profesor esplique la estructura y mecanismo del transportador del graphometro y demas instrumentos, presentándolos á la vista de los alumnos.*

graduado, y son los *cuadrantes;* otros que no tienen mas que el sesto y son los *sestantes*; otros que no tienen mas que el octavo y son los *octantes*. Empléanse estos instrumentos en las operaciones de *geografía* ó medida de la tierra, y en las de *navegacion* para medir la posicion respectiva de los objetos terrestres y de los astros cuando está el observador en el mar.

Empléanse tambien los círculos enteros, que se llaman *círculos repetidores,* porque en ellos se repiten las observaciones, de manera que los diferentes errores que puede haber habido en las diversas observaciones se compensan en parte y se desminuye el error total.

Ademas de los defectos propios de la construccion de estos instrumentos hay en todos ellos una causa de error cual es la desigualdad de las divisiones del círculo; porque la mano del hombre no puede nunca hacer las divisiones segun las concibe la imaginacion del geómetra ó con rigurosa exactitud. Con todo, puede disminuir tales inexactitudes hasta el punto de que sean realmente imperceptibles, aun cuand ose examinase con instrumentos que hagan sensibles los defectos mas ligeros.

Máquinas para dividir los círculos. Hay máquinas con que se divide el círculo pronta y cómodamente. Hácese de esta manera; sobre una platina ú hoja de laton se trazan varios círculos que tengan un mismo centro, y yendo desde el mas pequeño hasta el mayor se dividen sucesivamente

el 1.° 2.° 3.° 4.° 5.° círculos.
en 3. 4. 5. 6. 7. partes iguales.

Esta primera division debe hacerse con sumo cuidado, y comprobarla repetidas veces por alguno de los métodos que quedan indicados.

Supongamos ahora que se quiere dividir en partes iguales otro círculo ó alguna porcion de él. Para esto se colocará el nuevo círculo de manera que su centro tenga el mismo eje que el de todos los círculos graduados. (Aquí el profesor describirá el instrumento teniéndolo presente).

Esta operacion no es exacta sino en tanto que el centro de la pieza que se va á graduar está exactamente colocada sobre el centro comun de los círculos ya graduados. Mr. Gambey, celébre artista francés, ha hecho una aplicacion muy sencilla de las paralelas para hallar el medio de salvar este inconveniente y dividir con exactitud una circunferencia que no es concéntrica al círculo primitivamente dividido.

* Sea ABC, fig. 18, la pieza sobre la cual se ha de trazar un arco de círculo AB, con graduaciones perfectamente correspondientes á las de la platina. Un marco en ángulos rectos CMNPQ está dispuesto de modo que sus lados CM, PQ esten siempre dirigidos hácia el centro C de la pieza ACB que se quiere dividir, y no puedan moverse sino paralelamente á su posicion primitiva. Cuando se hace girar cierta cantidad, la platina por ejemplo 50°, el lado OCA pasa á la situacion *Oca*, CB pasa á la *cb*, y el ángulo *acb* es igual á 50° grados: pero en este movimiento el marco transportado en *cmnpq* no ha cambiado de direccion, y la línea *pq* se halla siempre en línea recta con el centro *c* del arco. Luego: 1.° el indicador Q señala sobre la pieza ACB una série de puntos todos igualmente distantes de C, esto es, un arco de círculo que tenga C por centro: 2.° cuando la platina gira la cantidad de un grado, el indicador Q camina tambien un grado sobre la pieza que hay que dividir. *

Nota. Nuestro autor habla aquí de la division antigua y moderna del círculo, y no todos entenderán lo que esto significa, porque hasta ahora nada ha hablado de ello. Ha dicho que el cuarto de la circunferencia del círculo lo dividieron en 90 partes iguales, de cuya division indica sus ventajas. Esta es la division que llama *antigua*: y es la que se ha usado desde que los hombres hicieron uso del círculo, y se usa en el dia casi por todos. Cuando en Francia se formó un nuevo sistema de pesas y medidas se trató tambien de hacer una nueva division del círculo, y se adoptó la

de dividir en 100 partes iguales ó grados el cuarto de la circunferencia del círculo. Esta es la division que llama *moderna*, en la que toda la circunferencia está dividida en 400 partes iguales ó grados. No es del caso tratar de la utilidad de esta nueva division. Se vé solo que las ventajas de ella deberán ser grandes para ocasionar el trabajo de reducir á esta nueva medida cuanto en este género se ha escrito desde Arquimides hasta ahora.

Como quiera que sea, ponemos aquí el largo de las divisiones del círculo en medida española.

	Pies.	Pasos dobles de 5 ps.
Circunferencia de la tierra.	143.556.880.	28.711.376.
Cuadrante del meridiano.	35.889.220.	7.177.844.

Division en 360 grados.

1. grado.	398.769. . . .	79.753.
1. minuto.	6.646. . . .	1.329.
1. segundo.	111. . . .	22.
1. tercero.	1,8. . .	37.

Division en 400 grados.

1. grado.	358.892. . . .	71.778.
1. minuto.	3.589. . . .	718.
1. segundo.	36. . . .	7.
1. tercero.	4,3 pulgadas.	
1. cuarto.	½. línea.	

LECCION CUARTA.

Formas diversas que pueden darse á los productos de la industria con la línea recta y el círculo.

Entre las figuras planas que estan terminadas por líneas rectas las hay regulares é irregulares, sencillas y complicadas. Nos limitaremos á dar á conocer las que con mas frecuencia se usan en las artes.

Dos líneas rectas sean ó no paralelas no pueden cerrar completamente un espacio. Para ello son menester á lo menos tres líneas que no sean paralelas.

Llámase *triángulo rectilíneo* la superficie encerrada por tres líneas rectas. Distínguese en un triángulo ABC, fig. 19, sus tres lados AB, BC, CA sus tres *ángulos*, y los tres *vértices* A, B, C de estos ángulos.

Los ángulos de un triángulo gozan de una propiedad notable y preciosa para las artes: su suma es igual á dos ángulos rectos, cualquiera que sea la magnitud y la forma del triángulo.

* Para probarlo prolonguemos el lado AB en BE, fig. 2, y tiremos BD paralela á AC. Las dos paralelas AC, BD estan cortadas por dos rectas ABE, BC, y así tendremos: 1.° el ángulo CAB igual al ángulo DBE: 2.° el ángulo ACB igual al ángulo CBD. Luego los tres ángulos A, C, B del triángulo ACB, serán iguales á la suma de los tres ángulos ABC, CBD, DBE, que ocupan todo el espacio de un lado de la línea recta AB, esto es, dos ángulos rectos. *

Por esta propiedad luego que se conocen dos ángulos de un triángulo, se conocerá el tercero con solo ejecutar una adicion y una sustraccion.

* Supongamos, por ejemplo, que estos dos ángulos sean el uno de 37° y el otro de 49°; añadiendo 49° á 37°

se tienen 86°, que restados de dos ángulos rectos ó 180°, hacen 94°: luego el tercer ángulo tiene 94°. *

Puesto que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos, seria necesario que uno de los ángulos fuese igual á cero para que los otros dos fuesen rectos. Luego un triángulo no puede tener mas que un ángulo recto.

Con mayor razon un triángulo ABC, fig. 19, no puede tener mas que un solo ángulo A *obtuso*, es decir, mayor que ángulo recto, este es el triángulo *obtusángulo*.

Un triángulo ABC, fig. 20, puede tener sus tres ángulos agudos, este es el triángulo *acutángulo*.

El *triángulo rectángulo* ABC, fig. 21, es el que tiene un ángulo recto B. La *hipotenusa* es el mayor lado AC, el cual está opuesto á dicho ángulo.

Comparemos ahora entre sí los lados del triángulo. Siendo la línea recta el camino mas corto para ir de un punto á otro, se sigue que *en un triángulo cualquier lado es mas corto que la suma de los otros dos*.

De los dos lados AB, AC de un triángulo, fig. 19, el mayor AC está opuesto al mayor ángulo B.

* En efecto, tomemos $Ab = AB$, y $Ac = AC$; despues tiremos B*b*, C*c*; los ángulos AB*b*, A*b*B, AC*c*, A*c*C serán iguales. Ademas ABC es mayor que AB*b*; y ACB es menor que AC*c*; luego el ángulo ABC es mayor que ACB. *

El triángulo *equilátero* ABC, fig. 21, es aquel cuyos tres lados son iguales entre sí.

El triángulo *simétrico* ABC, fig. 22, es aquel cuyos dos lados son iguales entre sí: (á este triángulo le llaman isosceles).

Considerando los dos lados iguales CA, CB, fig. 22, como oblícuas iguales con respecto á la base AB, la perpendicular CD cae en medio de esta base y divide el triángulo en dos partes iguales: su simetría justifica la denominacion de *simétrico* dada al triángulo cuyos dos lados son iguales.

A fin de satisfacer á las leyes de la simetría los arquitectos cubren la mayor parte de las casas y de los edificios públicos con un techo cuyo perfil es un triángulo *simétrico*. En los antiguos templos griegos, y las casas de Italia, fig. 23, este triángulo es *obtusángulo*; en los techos de los campanarios y en los antiguos edificios góticos, fig. 24, este triángulo es *acutángulo*.

Cuando hay que subir pesos se emplea bastante comunmente lo que se llama cábria, fig. 25, este es un aparato compuesto de dos piezas de madera unidas por un estremo en C, y separadas hácia el otro estremo por un travesaño AB. La cuerda que sirve para subir el peso D pasa por una polea fija en C. El triángulo ABC que representa la cábria es simétrico; luego la perpendicular tirada de C sobre la base B divide esta base en dos partes iguales.

En las artes ocurre con frecuencia el tener que ejecutar un triángulo del cual se conocen ciertas partes: véase aquí como se opera.

I. Cuando se conocen los tres lados 1. 2. 3, fig. 27.

* Primero se tira una recta AB igual al lado 3 en la posicion que se ha de construir el triángulo. Despues desde el punto A como centro con una abertura de compás igual al lado 2 se describe el arco de círculo *m*C*n*; el punto B como centro con una abertura de compás igual al lado 1, descríbase el arco de círculo *p*C*q*; por el punto C en que se cruzan los dos arcos tírense las rectas CA, CB; y ABC será el triángulo pedido. *

II. Cuando se conocen dos lados 1, 2, y el ángulo *a*, fig. 28, tírese primero en una posicion conveniente la línea AB igual al lado 2; despues con un instrumento propio para medir ángulos (el transportador, el compás ó cualquiera otro) tírese la línea *e*, de manera que el ángulo BAC sea igual al ángulo *a*, tómese AC igual al lado 1, tírese la línea recta BC, y se tendrá el triángulo pedido.

III. Cuando se conoce un lado solamente, 1, y los dos ángulos *a*, *b*, cuyos vértices están en los estremos de este lado, fig. 29.

* Tírese la línea AB igual á 1: despues con un instrumento para medir ángulos tírense sucesivamente las rectas AC, BC, que formen con AD los ángulos *a*, *b*: y será ABC el triángulo pedido. *

Todas estas operaciones son muy sencillas; y es de mucha importancia el que los profesores las hagan repetir frecuentemente á los alumnos con la regla y el compás.

Acabamos de esplicar tres maneras de construir un triángulo 1.° con tres lados dados; 2.° con dos lados y el ángulo comprendido entre ellos; 3.° con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. En cada caso hemos visto que estos datos eran suficientes.

Luego 1.° cuando dos triángulos tienen sus tres lados iguales dos á dos, son iguales. Este es el mismo triángulo construido con los mismos elementos en lugares diferentes.

2.° Cuando dos triángulos tienen dos lados, y el ángulo comprendido entre ellos iguales por una parte y otra, los dos triángulos son iguales.

3.° Cuando dos triángulos tienen dos ángulos, y el lado comprendido entre ellos iguales por una parte y otra, los dos triángulos son iguales.

Así, figura 26, los dos triángulos ABC, *abc* son iguales en los casos siguientes.

* 1.° Si AB es igual á *ab*, BC igual *abc*, AC igual á *ac*; 2.° si AB es igual á *ab*, BC igual á *bc*, y si el ángulo B es igual al ángulo *b*: estando B comprendidas entre AB y BC, *ab* y *bc*; 3.° Si AB es igual á *ab*, si el ángulo A igual *a*, y si el ángulo B es igual al ángulo *b*.*

Es muy importante que los artistas tengan siempre presente en su memoria estas tres condiciones de igualdad, porque se hace un uso muy frecuente de ellas en las operaciones de la industria, como en las demostraciones de la Geometría y de la mecánica. Si no se cumple rigurosamente con una de estas tres condiciones los triángulos no serán iguales, pues resultará algun àngulo ó algun lado de un triángulo que no sea igual al del otro. Es de la mayor importancia en la práctica de las

artes el conocer, de una manera acertada, por ciertas señales fáciles las condiciones indispensables para cada operacion; con lo que se evitarán un sin número de faltas, y servirá de comprobacion inmediata.

De las figuras de cuatro lados ó cuadriláteros. Hay figuras ABCD, fig. 30, completamente encerradas por cuatro líneas rectas, y tienen *cuatro ángulos y cuatro vértices* A, B, C, D. Llámanse *diagonales* las rectas AC, BD que unen los vértices opuestos.

En Geometría dan el nombre general de *cuadrilátero* á las figuras de cuatro lados. Las hay que por sus formas mas ó menos regulares las han distinguido nombres especiales.

El trapecio ABCD, fig. 31, es la figura de cuatro lados, cuyos dos lados AB, CD son paralelos.

Un trapecio es rectángulo, fig. 32, cuando tiene un lado BC que es perpendicular á los dos lados paralelos AB, CD.

Un trapecio ABCD, fig. 33, es *simétrico* cuando los dos lados no paralelos AD, BC son igualmente oblícuos con respecto á los otros dos.

En algunos edificios regulares el techo se compone de un triángulo *simétrico* MDC, fig. 33, en la parte superior, y de un trapecio *simétrico* ABCD en la parte inferior: y llámase á éste una *mansarda*, del nombre del arquitecto Mansard, al cual se debe este género de techado (1). La vertical MEF es la línea de simetría del triángulo y del trapecio.

Llaman *paralelogramo*, fig. 34, á la figura que tiene los cuatro lados paralelos dos á dos.

Aplicaciones. El paralelogramo tiene un uso contínuo en las artes; empléase frecuentemente en la construccion de las máquinas; sirve para producir lo que se llama el *movimiento paralelo*, &c.

---

(1) *N. T. En España llaman á ésta*, armadura quebrantada.

En virtud de las propiedades de las paralelas que hemos demostrado en la leccion 2.ª los ángulos opuestos de un paralelogramo A y C por una parte, y D y B por otra, son iguales entre sí: dos son agudos, y dos son obtusos: ademas si se reune un ángulo agudo con un ángulo obtuso la suma es igual á dos rectos.

* En efecto si prolongamos en CE, fig. 34, el lado DC, siendo paralelas las rectas AD, BC, el ángulo ADC es igual á BCE, y DCB mas BCE será igual á dos ángulos rectos. *

Pues que hemos probado (leccion segunda) que las paralelas comprendidas entre paralelas son iguales, se sigue que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales entre sí: así AB es igual á CD, y AD es igual á BC.

El punto O en que se encuentran las dos diagonales es el medio de cada una de ellas.

* En efecto siendo AOC, DOB, fig. 34, las diagonales, los triángulos ABO, DCO son iguales; pues que **1.°** AB=DC; 2.° el ángulo ODC=OBA; 3.° el ángulo OCD=OAB en virtud de las propiedades de las paralelas. Luego OB=OD y OA=OC. *

De las dos diagonales AC, DB, fig. 35, la mayor AC está opuesta á los mayores ángulos BD.

* En efecto tírense las líneas DE, CF perpendiculares á los lados AB, CD. Estas perpendiculares serán iguales; pero EB es menor que AF; luego la oblícua DB es mas corta que la oblícua AC. *

Se llama *losange* un paralelogramo ABCD, fig. 36, que tiene sus cuatro lados iguales. Esta figura por su regularidad tiene cierta gracia y se emplea frecuentemente en las artes de ornamento.

Cuando dos lados del paralelogramo forman un ángulo recto tambien lo forman todos los demas.

* En efecto si el ángulo A, fig. 37., por ejemplo es recto en el paralelogramo ABCD, el lado AD es perpendicular á AB; lo mismo sucede con BC respecto á la AB. Los dos ángulos A, B son rectos, y tambien son iguales D, C. *

Tal es la figura que se llama paralelogramo rectángulo, figura 37, ó solamente *rectángulo* á fin de abreviar. En esta figura las dos diagonales AC, BD son iguales.

* Para probarlo basta observar que los dos triángulos rectángulos ADC, DAB son iguales. En efecto **1.°** el ángulo recto D es igual al ángulo recto A; 2.° el lado AD es comun á los dos triángulos y por consecuencia igual en los dos; 3.° el lado DC del ángulo D en el primer triángulo es igual al lado AB del ángulo A en el segundo; luego el tercer lado AC de ADC es igual al tercer lado BD de DAB: luego AC, BD son las dos diagonales. *

El *cuadrado* ABCD, fig. 38, tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos iguales.

Si hacemos un resumen de las propiedades de las figuras de cuatro lados, presentaremos la enumeracion siguiente *que los jóvenes artistas deben grabar en su memoria.*

En el cuadrado los cuatro ángulos son iguales y rectos; los cuatro lados son iguales entre sí, y las dos diagonales son iguales entre sí.

En el rectángulo los cuatro ángulos son iguales y rectos; tienen dos lados mas largos iguales entre sí, dos mas cortos iguales entre sí, y dos diagonales iguales entre sí. En el losange, los cuatro lados son iguales entre sí; dos ángulos obtusos son iguales entre sí, dos ángulos agudos son iguales entre sí; por último las diagonales son desiguales.

En el paralelogramo hay dos lados mayores y dos ángulos mayores iguales; dos lados menores y dos ángulos menores iguales. Las diagonales son desiguales; la mayor está opuesta á los mayores ángulos y la menor á los menores ángulos.

Simetría de las figuras de cuatro lados. Aplicando una parte de estas figuras sobre la otra que es igual á ella se probará que: **1.°** el trapecio de lados oblícuos iguales es simétrico respecto de la recta EF que

pasa por el medio de sus dos bases: 2.° el rectángulo, fig. 37, es simétrico respecto de cada línea recta tirada por el medio de dos lados opuestos: 3.° *el losange*, fig. 35, es simétrico respecto de cada una de sus diagonales: 4.° *el cuadrado*, fig. 38, es simétrico respecto de sus dos diagonales, y respecto de cada recta que pasa por el medio de sus lados opuestos. Esta simetría en las figuras de cuatro lados es de la mayor importancia en las artes y en la mecánica.

Sabemos que *en todo triángulo la suma de los ángulos es igual á dos ángulos rectos.*

* Pero toda figura de cuatro lados ABCD, fig. 30, puede descomponerse en dos triángulos ABC, ACD, en cada uno de los cuales la suma de los tres ángulos es igual á dos ángulos rectos. Ademas los seis ángulos de estos dos triángulos tienen por suma los cuatro ángulos de la figura ABCD. Luego, *

En la figura de cuatro lados la suma de los ángulos es igual á dos veces dos ángulos rectos, ó bien á cuatro ángulos rectos.

* Si fuese una figura de cinco lados ABCDE, fig. 39, se podria de un vértice A tirar dos rectas AC, AD á los vértices C, D, lo que dividiria la figura en tres triángulos, cuyos nueve ángulos compondrian una suma igual á los cinco ángulos de la figura ABCDE. *

Así, *en la figura de cinco lados la suma de los ángulos es igual á tres veces dos, ó seis ángulos rectos.*

Continuando el mismo método se verá que la suma de los ángulos es igual en la figura.

de 3, 4, 5, 6, 7, 8.... lados,
á 2, 4, 6, 8, 10, 12.... ángulos rectos.

Relaciones del círculo con las figuras terminadas por líneas rectas. Por los tres vértices de un triángulo ABC, fig. 40, siempre se puede hacer pasar un círculo; y véase como: por el medio de AB tírese *mo* perpendicular á AB, y del medio de BC tírese *no* perpendicular á BC. El punto *o* en que estas dos perpendiculares se encuentran está igualmente distante de los tres vértices A, B, C: luego este punto es el centro de un círculo que pasa por dichos tres puntos.

El triángulo cuyos vértices estan situados en la circunferencia de un círculo se llama triángulo *inscripto* en el círculo.

Cuando un triángulo *rectángulo*, fig. 41, esto es, que tiene un ángulo recto B, el centro O del círculo que pasa por los tres vértices del triángulo está en el medio del lado C opuesto al ángulo recto: lado que hemos llamado *hipotenusa.*

Diremos aquí el medio mas sencillo para llegar á demostrar este principio (1).

En el rectángulo ABCD, fig. 43, las dos diagonales son iguales y por consecuencia tambien sus mitades OA, OB, OC, OD que pueden tomarse por radios de un círculo. Luego *siempre se puede inscribir en un círculo un rectángulo, fig. 43, y por consecuencia un cuadrado, fig. 44.*

---

(1) *Vamos á dar una demostracion independiente de la consideracion de los rectángulos Tiremos desde la mitad de AB, fig. 41, la recta MO perpendicular á AB, y desde el medio N de BC la perpendicular NO á BC; el punto O en que se encuentran es el vértice de dos triángulos iguales AMO, BMO, en los cuales espresaremos por 1 y 2 los ángulos agudos correspondientes á AMO, BMO. Así los ángulos 1 y 2 sumados componen* un ángulo recto. *Pero en el triángulo rectángulo mayor, el ángulo A y el ángulo C componen una suma igual á un ángulo recto; luego los ángulos señalados 1, 1, 1, 1, son todos iguales, y tambien los ángulos señalados 2, 2, 2, 2. Observemos que los cuatro ángulos 1, 1, 2, 2, alrededor del punto O son 1 mas 2, y 1 mas 2, esto es dos veces un ángulo recto. Luego AO y OC están en línea recta. Luego el punto O igualmente distante de A, B, C está sobre la hipotenusa AC.*

Dado un triángulo cualquiera, fig. 43, si se construye su igual ADC se forma un rectángulo, el cual está inscripto en un círculo teniendo su centro en medio de AC. Luego el círculo que pasa por los vértices A, B, C del triángulo ABC rectángulo en B, tiene por diámetro el lado mayor AC del triángulo.

Síguese de esto que toda figura ABCD, fig. 42, de cuatro lados, cuyos dos ángulos opuestos son rectos, puede inscribirse en un círculo que pase por los cuatro vértices de la figura.

En efecto la diagonal AC descompone esta figura en dos triángulos rectángulos inscriptos uno y otro en un círculo que tiene AC por diámetro.

A las figuras que tienen mas de cuatro lados les han dado nombres griegos que espresan el número de sus ángulos y de sus lados: así

El pentagono tiene.	5.	lados.
El exagono...........	6.	
El heptagono........	7.	
El octagono.........	8.	
&c.		

Entre estas figuras que se llaman en general polígonos (lo que quiere decir figuras de muchos ángulos) merecen un exámen especial los *polígonos regulares*, porque sus usos son frecuentes é importantes en la industria.

Los polígonos regulares tienen todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.

En virtud de esta definicion si se encuentra un punto O, fig. 27, igualmente distante de tres vértices A, B, C del polígono regular ABCDEF, yo digo que está igualmente distante de todos los otros vértices: así OA = OB = OC = OD....

* En efecto los triángulos simétricos AOB, BOC que tienen iguales sus bases AB, BC y tambien sus lados simétricos OA, OB, OC son iguales. Los ángulos simétricos son iguales á $\frac{1}{2}$ B, pues que los dos del medio sumados forman el ángulo B. El triángulo OCD es igual á OCB porque OC es comun; CD = BC como lados del polígono regular, y el ángulo OCD = OCB puesto que el uno de estos ángulos es la mitad de su suma. Se demostrará sucesivamente que los triángulos ODE, OEF,.... son iguales al primero, y por consecuencia simétricos. Luego sus lados simétricos OA, OB, OC.... son iguales. Por consecuencia el punto O está igualmente distante de todos los vértices de la figura regular, y así es el centro de un círculo que pasa por todos estos vértices. *

Existiendo este círculo desde luego que se puede hacerle pasar por tres vértices, cosa siempre ejecutable, resulta que *siempre se puede describir un círculo en el cual esté inscripto un polígono regular cualquiera que sea el número de sus lados.*

Recíprocamente *dado un círculo se puede inscribir en él un polígono de tantos lados como se quiera.*

Bastará para esto dividir su circunferencia en tantas partes iguales como lados haya de tener el polígono, y tirar rectas de cada punto de division á su inmediato.

En la leccion tercera hemos dado las relaciones de longitud entre los radios del círculo, y las distancias entre estos puntos, que son cabalmente las longitudes de los lados de los polígonos. En esto no habrá pues ninguna dificultad.

Aplicacion de los polígonos regulares á las fortificaciones regulares. Los ingenieros militares se sirven de los polígonos regulares para trazar las fortificaciones regulares. El número de lados de los polígonos depende de la magnitud del lugar que tienen que fortificar. El triángulo equilátero y el cuadrado no les sirven mas que para las obras de campaña. El pentagono, el exagono y el octagono sirven para cercar las plazas pequeñas y las ciudadelas. Las figuras de mayor número de lados sirven para cercar las ciudades mas considerables.

Aplicacion de las figuras precedentes á la obra del empedrado, de embutidos de vidriería y de mosaico. En estas obras el problema que ordinariamente ocurre

es el de cubrir exactamente un cierto espacio con figuras terminadas por líneas rectas. Fácil es ver que este problema es suceptible de una infinidad de soluciones segun las combinaciones infinitas de las líneas rectas que pueden tirarse en un plano.

Si se quiere que todas las figuras sean regulares y de un mismo número de lados, la cuestion se limita mucho y no puede resolverse sino con las figuras siguientes: 1.° con triángulos equiláteros cuyos vértices rematan seis á seis en un mismo punto, fig. 45.

2.° Con cuadrados cuyos vértices rematan cuatro á cuatro, ó cuatro en un mismo punto, fig. 47.

3.° Con exagonos cuyos vértices rematan tres á tres en un mismo punto, fig. 46.

* Para demostrar estas proposiciones presentamos la tabla siguiente: los ángulos de los polígonos

de 3 lados son de.........	60.	grados.
de 4.........................	90.	
de 5.........................	108.	
de 6.........................	120.	
de 7.........................	128 $\frac{4}{7}$.	
de 8.........................	135.	
de 9.........................	140.	
de 10.......................	144.	
de 11.......................	147 $\frac{3}{11}$.	
de 12.......................	150.	

Se vé que 6 veces 60°, y 4 veces 90° y 3 veces 120°, hacen 360°. Y como ninguno de los demas números de grados divide 360° en un número redondo de partes, no se puede llenar el espacio alrededor de un punto dado con otros ángulos de polígono regular, sino con los de las figuras de tres, cuatro y seis lados. *

Observemos que llenando el espacio alrededor de un punto, fig. 27, con seis triángulos de lados iguales, los seis lados esteriores forman un exagono regular inscripto en un círculo que tiene por radios los lados

interiores. Luego *los lados del exagono son iguales al radio del círculo en que está inscripto.* Propiedad preciosa para la industria.

El gran número de objetos que deben ocuparnos en este curso no nos permite examinar menudamente muchas figuras mas ó menos regulares, que combinadas juntas producen particulares efectos en las artes: su estudio y su dibujo ejercitarán y formarán á la vez la imaginacion y gusto de los alumnos.

Cuando se trata de ejecutar un mosaico, un embutido, un pavimento, sobre los cuales hay que andar, importa que no haya ningun punto que sea la reunion de muchos vértices; porque poniendo sobre este punto el pie ó cualquier otro objeto pesado cederia inmediatamente á la presion, lo que desbarataria la union y solidez de la obra.

Por eso, casi nunca se emplea la combinacion de los triángulos equiláteros, cuyos vértices rematan seis á seis en los mismos puntos.

Tambien conviene evitar que concurran los vértices de los cuadrados cuatro á cuatro en un mismo punto.

Cuando se quiere cubrir un piso cualquiera con cuadrados iguales entre sí se tiene cuidado de colocar los cuadrados ó rectángulos en filas rectilíneas, y de poner las juntas de los cuadrados de una fila frente por frente al medio de los cuadrados de la fila siguiente.

En virtud de este principio en las construcciones de arquitectura suelen emplearse las piedras labradas segun la forma y puestas en la posicion que indica la fig. 48.

Los romanos daban generalmente la figura de losange á las piedras y á los ladrillos con que construian las paredes; y llamaban á esta clase *opus reticulatum*; obra de red, fig. 49, y en efecto tiene el aspecto de una red.

El empleo del exagono en el embaldosado de las habitaciones ofrece muchas ventajas, fig. 46.

Las abejas construyen sus celdillas dándoles la forma de exagonos regulares. Esta forma tiene la propiedad

de que con una cantidad dada de cera, las abejas pueden encerrar el mayor espacio donde cada una habita.

Desde una remota antigüedad los hombres tuvieron la idea de ejecutar construcciones muy grandes y muy sólidas con trozos enormes de piedra cortados en forma de polígonos irregulares; y muchos de los monumentos que erigieron subsisten todavia en Italia, Sicilia y Grecia. Tales son las construcciones que se han llamado *ciclopeas* y que representa la fig. 50.

La ventaja de este género de construccion consiste en poder aprovecharse de la forma natural de las piedras destinadas á erigir monumentos, cortándolas de manera que pierdan lo menos posible de su masa.

En el célebre muelle construido por los ingleses para proteger la rada de Plimouth, contra la accion violenta de las olas del mar, han revestido la cara superior y el talus interior en la parte mas alta con trozos grandes de marmol, encajados y cortados como en las construcciones ciclopeas. Este encaje impide que el mar arranque una de las piedras sola, y hace que cada una concurra á la solidez del todo.

De las figuras terminadas por partes de línea recta y de círculo. Si las figuras compuestas de líneas rectas ofrecen ya tanta variedad, se puede juzgar cuanto mayor será la variedad de las figuras cuando se combinen partes de linea recta y de círculo.

La mas sencilla de las combinaciones es la que se compone de un semicírculo y de su decimetro.

Tal es la figura del grafométro y del transportador que sirven para medir ángulos (1).

Tal era tambien la figura de los teatros en los pueblos antiguos, tal es la figura de los anfiteatros consagrados á las asambleas públicas y á la enseñanza en los pueblos modernos. El orador ó el profesor estan en el centro, fig. 51, y los espectadores estan coloca-

(1) *Véase la lámina de la leccion tercera fig.* 17.

dos en semicírculos igualmente distantes, y todos tienen el punto C por centro y AB por diámetro.

Si por los estremos del diámetro ACB, fig. 52, se tiran perpendiculares á este diámetro, serán tangentes en A y B al semicírculo AMB. Si se tira en seguida, á una cierta distancia, la línea recta EF paralela á AB, se forma una figura que se emplea con frecuencia en las artes, que es la de las bóvedas y de las puertas que llaman de *medio punto*.

Si encima del rectángulo ABEF, fig. 35, con AB por radio: 1.º del punto A como centro describo el arco AM, formo una figura que representa las bóvedas llamadas *apuntadas*. La figura de las bóvedas de *medio punto* pertenece á la arquitectura griega y generalmente á la arquitectura moderna; la figura de las bóvedas *apuntadas* pertenece á la arquitectura gótica. Estas dos arquitecturas que hacen uso de formas geométricas diferentes deben á estas formas los caracteres particulares que las distinguen esencialmente. Cada una merece la estimacion y admiracion de las personas de buen gusto; cada una merece ser el objeto de un estudio profundo, ora por la escelencia de las formas y de las proporciones, ora por la valentía y la solidéz de las construcciones.

Si en la fig. 52 describimos un semicírculo sobre EF como diámetro, tendremos un contorno AMBFNE que es el de las arenas destinadas por los antiguos á las carreras públicas de caballos, y llamadas por esta razon *hipodromos*. Las metas donde tomaban la vuelta los que corrian estaban situadas en los centros C y *c* de las partes circulares.

Los modernos usan en sus puentes y sus edificios de bóvedas rebajadas que se componen de varios arcos de círculo, lo que se llama arco *carpanel ó apainelado*. En la fig. 54 hay tres arcos de círculo que tienen tres centros O, P, Q. (Véase la leccion XIV.)

Hay un género de arquitectura gótica ó mas bien morisca que consiste en formar bóvedas con dos arcos

pequeños muy curvos BD, GF, que forman un ángulo obtuso como se ve en la fig. 55. Los ingleses tienen muchos edificios góticos construidos en este género y no menos notables por la elegancia de las formas que por la valentía de la construccion. Tales son las capillas de Enrique VIII en Westminster, de la Trinidad en Cambridge y del Palacio de Windsor.

Arte de perfilar. Los arquitectos han imaginado combinaciones sencillas y graciosas del círculo y la línea recta para adornar, con el nombre de molduras, los perfiles de los edificios. El carpintero, el ebanista, el constructor de máquinas, emplean estas formas y deben conocerlas bien.

La mas sencilla de todas es el filete ó liston compuesto de dos líneas paralelas muy cercanas y terminadas en un estremo por una perpendicular. En la fig. 56 se vé un filete solo AB; y en la fig. 57 se ven varios puestos unos encima de otros que representa el capitel del orden dórico griego, llamado el *orden de Pesto*; porque hay en Pesto un templo rodeado con soberbias columnas de este orden.

Ordinariamente se echa un filete al resto del edificio con un cuarto de círculo tangente por la parte superior, por debajo del filete; y por la parte inferior al lado vertical de la pared, de la pilastra ó de la columna que se quiere perfilar.

Ordinariamente se echa sobre el filete un semicírculo voladizo que se llama *bocel ó tondino*, fig. 56, tambien se emplea separadamente el cuarto de círculo en relieve llamado *cuarto bocel* AmB, fig. 58; y el cuarto de círculo en hueco AmB, fig. 59, (*cuarto bocel reverso*).

Dos cuartos de círculo AMB, BND, fig. 60, que tienen el mismo radio y sus centros O, P, en la misma vertical forman el *talon*.

Dos cuartos de círculo AMB, BND, fig. 61, que tienen el mismo radio, y sus centros O, P en la misma horizontal forman la *gola*.

Tales son los elementos sencillos con que los arquitectos han compuesto esa preciosa variedad de cornisas, frisos, bases y capiteles, que se advierten en los edificios antiguos y modernos.

No hay que creer que la combinacion de estas formas sea enteramente arbitraria, ni efecto de la casualidad ó de caprichos vanos de una imaginacion desarreglada. El arte de perfilar los edificios y sus diversas partes debe su perfeccion á la observacion fiel de las leyes de la sencilléz, de la variedad y del contraste. En lugar de prodigar demasiado los ornamentos se deben agrupar en masas que el ojo pueda fácilmente percibir, y que esten separadas unas de otras por grandes espacios perfectamente unidos. En cada grupo se deben oponer las molduras mas pequeñas á las mas voluminosas, y las formas rectas á las formas curbas; á fin de que cada una haga resaltar las que le rodean. Tales son las reglas principales de esta parte del arte de hermosear los monumentos: reglas que no fueron descubiertas solo por los grandes arquitectos de la Grecia y de la Italia; porque se hallan empleadas con no menos arte en los bellos monumentos del antiguo Egipto; en los edificios góticos de la edad media, y en las mezquitas y palacios que los moros levantaron en España en tiempo en que hacian florecer en este país las ciencias y las artes, entonces casi desconocidas en el resto de la Europa.

Una aplicacion de la Geometría mucho mas importante que la decoracion esterior y el perfil de los adornos es la invencion y el trazado del plano mismo de los edificios. Las formas adoptadas por los arquitectos se reducen casi todas á las de la línea recta y el círculo. Si alguna vez tienen necesidad de formas mas complicadas las descomponen en partes circulares como ya lo hemos visto en las bóvedas rebajadas.

Cuando los arquitectos tienen que construir un edificio en un espacio enteramente libre, serian imperdonables si no adoptasen las formas regulares, cuya sen-

cilléz, uniformidad y simetría agradan á la vista y manifiestan el espíritu de sabiduría y de orden con que el hombre levanta sus monumentos.

La forma generalmente adoptada es la del rectángulo y del cuadrado; porque estas figuras se prestan mas fácilmente á las subdivisiones de la misma figura que son necesarias para la distribucion interior. Estas formas no tienen otro inconveniente que el de acomodarse dificilmente con los contornos circulares interiores, sin pérdida de lugar y sin dejar recodos de una figura irregular, que es preciso ocultar á la vista. Sin embargo se saca partido de estos recodos destinándolos para las escaleras interiores ó para depósitos de objetos que conviene no ofrecer á la vista.

En las ciudades el espacio es muy precioso y muy caro, y el arquitecto se vé en la necesidad de aprovechar el terreno mas pequeño, y de trazar del modo mejor posible un sistema de habitaciones regulares en una figura casi siempre muy irregular. Aqui es donde el hábito de combinar las figuras de geometría podrá servir mucho á los artistas y les proporcionará encontrar las combinaciones mas felices.

Algunos profesores de arquitectura creen que hacen muy hábiles á sus discípulos proponiéndoles formar proyectos de edificios que costarian millones y que edificarian sin ninguna incomodidad en los espacios imaginarios. ¡De este modo dan á sus alumnos el gusto de un lujo ridículo, y les hacen adquirir las ideas de gasto que mas tarde cuestan caras á los ciudadanos! Valdría mas ejercitar mucho el talento inventor de los jóvenes en componer planos de edificios, sujetándose á toda la irregularidad de las formas que se encuentran dentro de las ciudades en donde las casas están mas apiñadas.

LECCION QUINTA.

De las figuras iguales, de las figuras simétricas, y de las figuras proporcionales.

Dos figuras son iguales cuando son perfectamente semejantes y de la misma magnitud; de suerte que la una puesta sobre la otra se confunda con ella exactamente y en toda su estension.

La geometría suministra á las artes medios variados para ejecutar una figura igual á otra. Problema muy importante para la industria.

Cuando hay que ejecutar objetos de grabado, escultura, ornamento &c. es menester hacer moldes y modelos perfectamente iguales á los objetos mismos que se han de producir.

Ya hemos visto (leccion segunda) que por medio de paralelas que tenian la misma longitud se podia construir fácilmente una figura cualquiera igual á otra, y situada de modo que las líneas correspondientes en las dos figuras fuesen paralelas.

Esta operacion estará tanto mas sujeta á error cuanto las paralelas sean mas largas y esten mas distantes unas de otras. A estas causas de error hay que añadir la imperfeccion mayor ó menor de las reglas, de los compases, de los cordeles que se emplean para medir las distancias, el corte mas ó menos fino de los lápices, plumas ó tira-líneas de que se hace uso &c.

El mismo medio que en muchos casos sirve al geómetra para asegurarse de que dos figuras son perfectamente iguales, sirve al artista para ejecutar una figura igual á otra. Y quiero hablar del medio que consiste en poner una de las dos figuras sobre la otra para ver si en esta posicion se ajustan perfectamente sin que la una salga de la otra en ningun punto.

Propongámonos ejecutar una figura ABCD...., fig. 1, sobre una estension cualquiera MNPQ como una tela desdoblada, una hoja de metal &c. Pongamos la figura ABCD.... de manera que se halle en *abcd*.... dentro de MNPQ, fig. **1**, doble; despues cortemos MNPQ por los lados *ab*, *bc*, *cd*....; y habremos hecho la figura *abcd*.... necesariamente igual á ABCD....

En lugar de cortar perfectamente la segunda figura se suele trazar con lápiz, con greda, con tinta &c. el contorno *abcd*.... siguiendo los bordes de la primera figura. Se separa esta primera figura, y se corta despues mas fácilmente la segunda.

Tal es la manera como los sastres, los canteros, los caldereros, los hojalateros, los carpinteros de ribera y los obreros de otras muchas profesiones ejecutan una figura igual á un modelo dado.

Cisqueros. Cuando la primera figura no está recortada sobre la superficie que la contiene no se podrá emplear el medio que acabamos de indicar; y entonces si la figura modelo es poco interesante se aplicará sobre MNPQ, y se picarán todos los puntos notables *a*, *b*, *c*, *d*.... que se unirán despues con líneas rectas. A veces se pican las líneas enteras que hay que reproducir; despues con un saquillo lleno de carbon pulverizado (esto es un cisquero), se golpea suavemente sobre el modelo que cubre á MNPQ, y así queda estarcida la primera figura. Las partes menudas de carbon que pasan al traves de cada agujero representan por su gran número todos los contornos de la figura que hay que hacer. La industria ha encontrado otros medios que sin daño del modelo permiten sacar una copia exacta.

Calcados. Para no agujerear un dibujo se pone una hoja transparente sobre el objeto cuya copia se quiere sacar, y se siguen con un lapiz, un pincel, un puntero, una pluma &c. los contornos que se quieren reproducir. A esto se llama *calcar*.

Simetría de las figuras. Dos figuras *abcd*...., *a'b'c'd'*...., fig. **1** *doble*, son simétricas cuando sus

puntos correspondientes *a* y *a'*, *b* y *b'*, *c* y *c'*, &c. estan en las paralelas que una perpendicular MN las corta á todas por medio. Si se dobla el cuadro MNPQ sobre MNP'Q', es evidente que *a* se aplicará en *a'*, que *b* se aplicará en *b'*, &c...., de suerte que si la figura *abcd*.... puede hacer una impresion en MNP'Q', señalará la figura *a'b'c'd'*.... que es la simétrica. Luego *con paralelas y una perpendicular que las corte por el medio siempre se puede ejecutar una figura* a'b'c'd'.... *simétrica á otra* abcd....

Producion de figuras iguales ó simétricas por el grabado, la imprenta, la litografía &c. Estas artes tienen por objeto el formar en una lámina, ó superficie de madera, metal, piedra ó de cualquiera otra sustancia figuras cuya impresion ha de transportarse exactamente sobre otras superficies. Es necesario observar que la figura impresa está al reves, respecto de la de la lámina; porque la derecha se imprime á la izquierda y la izquierda á la derecha. Débese pues escribir al reves sobre la lámina si se quiere que lo escrito se reproduzca en su sentido natural. Véase aquí por que los caractéres de imprenta estan grabados al reves y colocados unos despues de otros de derecha á izquierda, á fin que en el papel esten en su forma natural y se sigan de izquierda á derecha. Así la impresion simple produce copias no *iguales* á las figuras de la lámina, sino *simétricas*.

Producion de las figuras iguales por el cliso. Se graban, se componen, se dibujan matrices, con las cuales se hace impresion en láminas; láminas que suelen emplearse despues para imprimir lo escrito, la música, los dibujos &c. Los objetos pasan de izquierda á derecha en la primera impresion, y luego pasan de derecha á izquierda en la segunda. Luego en el cliso los objetos impresos son idénticos ó bien *iguales* en la matriz primitiva y en las copias sacadas con la lámina intermedia. En virtud de este principio se graban en sentido natural los punzones que sirven de matriz para

fundir los caractéres de imprenta: estos caractéres estan por consecuencia al reves, y la impresion que producen se halla en el sentido natural. En el grabado, en la litografia, se dibuja, se escribe en el sentido natural en un papel ó carton preparado; esta escritura está al reves en la piedra y en su sentido natural sobre las hojas que dan las litografias.

Ahora pidamos á la geometría nuevos medios para ejecutar una figura igual á otra.

* Representémonos una figura ABCDEFGA, fig. **1**, compuesta de tantos lados como se quiera. Si de un vértice A de este polígono regular ó irregular se tiran líneas rectas á todos los demas vértices se dividirá el polígono en triángulos; y como es fácil construir un triángulo igual á otro, se hará sucesivamente el triángulo *abc* igual á ABC, *acd* igual á ACD, *ade* igual á ADE,.... y al fin se llegará á tener completamente la figura *abcdefg* (fig. **1**. doble) igual á ABCDEFG, fig. **1**. *

* Podemos reproducir toda figura ABCDEFGA, sirviéndonos solamente de un compás para medir la longitud de los lados y de un semicírculo ó transportador para medir la magnitud de los ángulos. Trácese primeramente el lado *ab*, igual á AB; despues poniendo el centro del transportador en B, y alineando la base diametral de éste segun el lado AB, se anotará muy exactamente el número de grados y fracciones de grados del ángulo ABC. Se llevará el transportador á *b*, sobre la nueva figura que se va á construir; y se señalará el número de grados que se acaban de medir. Sea *m* el punto correspondiente á este número en el contorno del transportador. Señalando sobre el papel el punto *m* con la punta del compás, y trazando la línea recta *bmc* igual á BC se tendrá otro lado de la nueva figura. Poniendo el transportador en C se medirá el ángulo BCD que se transporta á *bcd* y así sucesivamente hasta el fin. Si la operacion está perfectamente ejecutada cuando se traza el último lado *ga*, debe tocar el primer punto *a*, y

tener la longitud de GA. Pero cuando el número de lados del polígono es algo considerable, es casi imposible llegar á este resultado. El menor error cometido en un ángulo influye en todos los siguientes; dado que la direccion de un lado la fija la del lado precedente. En fin el error cometido en la longitud de un lado aumenta ó minora la figura mudando paralelamente hácia fuera ó hácia dentro todos los lados del polígono.

He presentado este método para manifestar cuán susceptibles son de error en la *práctica* ciertos medios de operar que son rigurosos en *teoría*. Solo por una atinada eleccion de métodos es posible unir la sencilléz de las operaciones á la exactitud de ellas.

Busquemos otra manera mejor de ejecutar una figura semejante á otra.

Si construimos sucesivamente los triángulos *abc*, *acd*...., fig. **1** doble, y no atendemos sino á su comparacion aislada con los que son iguales á ellos, dificilmente podremos evitar errores notables. En efecto los errores cometidos en cada ángulo se multiplican á medida que se aumenta el número de los ángulos, y así darian mas motivos de error, de suerte que podria suceder que el ángulo total *bag* se diferenciase sensiblemente de BAG, aunque cada uno de los ángulos parciales *bac*, *cad*,.... que aquel comprende se diferenciasen muy poco de los ángulos correspondientes BAC, CAD....

* A fin de comprobar esta igualdad se verán aquí los muchos medios que ofrece la geometría.

1.° Empleando las paralelas; porque dos ángulos que tienen los lados paralelos son iguales.

2.° Midiendo con un compás AB igual á *ab*, AG, igual á *ag*, BG igual á *bg*.

3.° Tirar el tercer lado BG, *bg*, de los dos triángulos ABG, *abg*; despues ver si el punto A está á la misma distancia de BG, que *a* de *bg*; es decir si las perpendiculares AZ, *az*, tiradas de A*a*, BG y de *a* á *bg*, son iguales entre sí.

Habiendo verificado los ángulos ABG, *abg* se trazarán en estos ángulos las líneas AC, *ac*, AD, *ad*...., para formar en ellos los ángulos parciales iguales; se tomarán las longitudes AC igual á *ac*, AD igual á *ad*, AE igual á *ae*; despues se tirarán los lados *bc*, *cd*, *de*, *ef*...., y quedará trazada la segunda figura.

Se comprobará esta última parte del trazado conforme se va ejecutando, sea con un *compás*, viendo si CD es igual á *cd*, DE igual á *de*...., sea con un *grafómetro* viendo si el ángulo ABC es igual á *abc*, si el ángluo BCD es igual á *bcd*, &c. Si se nota algun error se recorrerán las operaciones ya hechas á fin de averiguar el orígen y rectificarlo. *

Método de los cuadrados. El método de los cuadrados lo emplean frecuentemente los artistas para hacer una figura igual á otra, fig. 2.

Divídese primeramente la figura que se quiere imitar en bandas iguales con paralelas dirigidas en dos sentidos perpendiculares; numéranse los cuatro lados de esta division. Para mayor claridad, ejecútase una division semejante en el plano en que se ha de trazar la nueva figura igual á la primera (1). Hecho esto, se marcan los puntos esenciales que hay en cada uno de los cuadrados.

* Se examina primeramente si no hay nada en la banda OI, OI. En la banda vertical I. II, I. II, no hay mas que el vértice A, que se encuentra sobre la línea 4. 4. Yo tomo sobre esta línea una abertura de compás igual á la distancia de este punto á I. II; la llevo sobre la

(1) *En las grandes operaciones topográficas que ocurren en la guerra, el cadastro &c. se divide frecuentemente en* cuadrados *el espacio de que se quiere levantar el plano; cada persona levanta los objetos contenidos en un cuadrado numerado segun dos líneas 1, 2, 3...., I, II, III.... despues se unen estas partes para formar el todo del plano.*

misma figura en I. I. *a*. Veo luego que el punto B está en el cuadrado II. III. 6. 7; mido la distancia de B á las líneas II. II. y 6. 6; llevo estas distancias á la nueva figura, y tengo el punto *b*. Del mismo modo tendria todos los demas vértices *c*, *d*, *e*,.... y trazaria el polígono *abcde*.... *a* igual á ABCDE.... A. *

Está á la vista que en el método que se acaba de esponer hay tres orígenes de inexactitud á saber: 1.° en el paralelismo ó en la igualdad de desvio de las líneas que forman los cuadrados: 2.° en el trazado mismo de cada línea, por su rectitud, su grueso &c.; y 3.° en la medida de la posicion de cada punto.

Vuelvo á decirlo; aquí se ve como la ejecucion de los métodos mas sencillos presentan muchos motivos de errores; y cuán necesario es en los artistas la habilidad práctica, la atencion, la paciencia, y el buen juicio para evitar tales errores, ó descubrirlos y llegar al grado de exactitud que caracteriza los progresos de una industria muy adelantada. No cause ya admiracion si son necesarios siglos enteros, para llegar á la ejecucion perfecta de una máquina cuyos principios estan bien conocidos, y las formas determinadas, pero cuyo buen éxito depende de la ejecucion exactísima de sus diversas partes. Esta es la causa de que sea dificil á las naciones menos adelantadas en las artes, en que es necesaria la precision, el alcanzar á las naciones que lo están mucho mas, porque éstas se valen de su mismo adelantamiento para disminuir sin cesar las causas de inexactitud de sus operaciones. La teoría bien entendida y juiciosamente aplicada á la práctica, es quien puede poner á la par las naciones que no están en primera línea, y hacer que sobrepujen á las rivales que les llevan ventaja por la perfeccion de sus productos. Tal es el objeto de nuestra enseñanza.

Figuras proporcionales. No basta para la industria saber ejecutar una figura simétrica ó igual á otra; pues sucede con frecuencia tener que hacer figuras exactamente semejantes á otras pero mayores ó menores. La

geometría suministra el medio de hacerlo por las propiedades de las *líneas proporcionales*, y de los *triángulos semejantes*.

Supongamos que se divide una recta AF, fig. 3, en partes *iguales* AB, BC, CD, DE,.... Supongamos que por cada punto de division se tiran en una direccion cualquiera las paralelas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*, F*f*,.... Estas paralelas estarán todas *igualmente* distantes. En efecto si tiramos A1, B2, C3, D4,.... perpendiculares á las paralelas formaremos los triángulos iguales AB1, BC2, CD3....; pues que estos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales, y ademas un lado igual á saber: AB igual á BC igual á CD igual á DE.... Luego las perpendiculares A1, B2, C3, D4, que son en estos triángulos los lados correspondientes, y que miden los intervalos entre las paralelas consecutivas son iguales entre sí.

Tiremos ahora la línea *mnopqr* en una direccion diferente de AF; digo que las partes *mn*, *no*, *op*, *pq*, *qr*, serán iguales entre sí.

En efecto si tiramos las perpendiculares *m*1, *n*2, *o*3.... á las líneas paralelas, estas líneas estarán igualmente distantes, y se tiene: *m*1 igual á *n*2 igual á *o*3.... Ademas los triángulos *mn*1, *no*2, *op*3.... tienen paralelos los lados y por consecuencia iguales los ángulos; luego son iguales. Luego los lados correspondientes *mn*, *no*, *op*.... son iguales.

Luego, en fin, cuando una oblicua AF, fig. 3, *está dividida en partes iguales por varias paralelas* A*a*, B*b*, C*c*, D*d*...., *estas paralelas dividen tambien en partes iguales cualquiera recta* mr *que las corte.*

Hácese uso de esta propiedad para dividir una recta dada en tantas partes iguales como se quiera.

Supongamos que se trate, por ejemplo, de dividir en cinco partes iguales la línea AF, fig. 4. Del punto A tiremos una recta X en una direccion cualquiera; despues con una abertura de compás tambien cualquiera señalemos las divisiones 1, 2, 3, 4, 5, iguales entre sí.

Tiremos por el punto 5 y el punto F, la línea F5; despues por los puntos 1, 2, 3, 4, las líneas B1, C2, D3, E4, paralelas á F5. La línea F quedará dividida en cinco partes iguales, porque las cinco partes de esta recta estarán comprendidas entre paralelas igualmente distantes unas de otras.

He aquí el medio que se emplea mas ordinariamente para dividir las escalas que sirven para dibujar los planos de arquitectura civil, militar ó naval.

La importancia de esta division de las escalas es muy grande, pues de ella mas que de todo depende la inexactitud ó la exactitud de los trazados en que las escalas deben servir. Si algunas partes de una escala, siendo todo lo demas exacto, fuesen falsas, todas las porciones de los trazados en que estas partes se tomasen como medida, se encontrarian igualmente falsas, y el mismo error podria propagarse muchas veces, y tanto que podria llegar á ser el elemento de nuevos y mas graves errores.

Para llegar á formar una buena division de escala es necesario que las divisiones A1, 1.2, 2.3.... no sean menores que AB, CD, DE.... Es necesario poner bien exactamente las puntas del compás sobre la linea X trazada tambien con mucho cuidado. Es necesario que la señal que se hace con el compás sea tan pequeña que ocupe el menor espacio posible á fin que su estension no deje cometer sino un débil error; en fin cuando se trazaren las paralelas es necesario que el medio de la línea de lapiz ó de tinta pase precisamente por el punto de division correspondiente, y que el paralelísmo sea muy exacto. Sin la reunion de todas estas condiciones no puede lograrse el buen éxito de la operacion.

Por medio del compás se comprobará la division de AF, fig. 4, para ver si las partes AB, BC, CD.... son en efecto rigurosamente iguales.

* *Divisiones menores de las escalas importantes.* Frecuentemente ocurre dividir la unidad de la escala

AM, fig. 5, en un número de partes tan grande que no se pueden señalar en la pequeña línea recta AM, de una manera bien exacta y bien distinta. En este caso tírense las paralelas igualmente distantes M*m*, N*n*, O*o*, &c. Tírense tambien las dos perpendiculares MF, A*f*, y la oblícua AF. Entonces las longitudes B*b*, C*c*, D*d*, E*e*.... son entre sí como 1, 2, 3, 4.... que representan las divisiones de MA en tantas partes iguales como espacios iguales hay entre las paralelas M*m*, N*n*, O*o*, &c. Por ejemplo si MA representa 1 pie y hay diez paralelas á MA todas igualmente distantes las partes B*b*, C*c*, D*d*, E*e* &c., serán respectivamente 1, 2, 3, 4.... décimos de pie. Con las escalas construidas de esta manera, en lugar de poner siempre las puntas del compás sobre la misma línea MA, lo que la agujerearia bien pronto, se ponen segun la variedad de los números sobre N*n*, O*o*, P*p*.... De este modo las escalas se conservan mucho mas tiempo, cosa muy importante en el dibujo. *

Comprobacion del trazado de los modelos de una máquina ó de un producto de industria. Cuando haya que comprobar el trazado de una máquina ó de un producto ejecutado, valiéndose de una escala, la primera cosa que se debe hacer es comprobar la escala empleada para construirle. Si es falsa, el dibujo se dirá que es *malo*, sin otro exámen; si es exacta el dibujo podra presentar otros motivos de error y es menester buscarlos.

Volvamos á la division de las líneas rectas por las paralelas. Supongamos que AF, fig. 5, está cortada por las paralelas A*m*, B*n*, F*r*, desigualmente distantes; y entonces las partes AB, BF comprendidas entre estas paralelas tampoco serán iguales entre sí. Lo mismo sucederá con las partes *mn*, *nr*, de cualquiera otra recta *mr* cortada por estas paralelas.

Pero si BF es mayor que AB, tambien *nr* será mayor que *mn*; ademas *nr* contendrá la longitud de *mn* tantas veces como BF contenga la longitud AB.

Si, por ejemplo, BF comprende cuatro veces á AB, dividiendo DF en cuatro partes iguales BC, CD, DE, EF, y tirando las paralelas C*o*, D*p*, E*q*, quedará cortada *nr* en otras tantas partes *no*, *op*, *pq*, *qr*, iguales á *mn*, como partes haya BC, CD, DE, EF, iguales á AB. Luego BF contiene á AB tantas veces como *nr* contiene á *mn*. *

Esta igualdad de las veces que BF contiene á AB, y *nr* contiene á *mn* se indica del modo siguiente:

BF dividido por AB es igual á *nr* dividido por *mn*

$$\frac{BF}{AB} = \frac{nr}{mn}$$

ó, BF es á AB como *nr* es á *mn*,
ó, BF : AB : : *nr* : *mn*,

Vése aquí lo que se llama una *proporcion geométrica* que siempre contiene dos *razones iguales* $\frac{BF}{AB}$ y $\frac{nr}{mn}$.

Así la razon geométrica de dos cantidades es la primera cantidad dividida por la segunda; *la razon inversa* es la segunda dividida por la primera.

Una proporcion BF : AB : : *nr* : *mn*, tiene cuatro *términos*; el primero y último se llaman *estremos*; los dos del medio se llaman *medios*.

Propiedad fundamental de las proporciones;

El producto de los dos estremos es igual al producto de los dos medios.

* Para demostrarlo observemos que en la proporcion BF : AB : : *nr* : *mn*, son iguales $\frac{BF}{AB}$ y $\frac{nr}{mn}$; si pues se multiplican estas dos razones á la vez por AB y por *mn* los productos serán iguales. Pero BF dividido por AB multiplicado por AB y despues por *mn* es lo mismo que BF multiplicado por *mn*; lo que es *el producto de los estremos*. Del mismo modo *nr* dividido por *mn* multiplicado por AB, y despues por *mn* es lo mismo que *nr* multiplicado por AB; lo que es *el producto de*

los medios. Luego el producto de los estremos es igual el producto de los medios. *

El uso de las proporciones geométricas es infinito en la geometría y en la aritmética, como tambien en sus aplicaciones á otras ciencias, al comercio, á las operaciones de la industria &c.

Vamos á ver como la aritmética espresa con números las proporciones geométricas.

Supongamos la figura 5 ejecutada por medio de una escala, podremos representar cada término de la proporcion BF : AB : : *nr* : *mn*, por el número de veces que estas proporciones de línea recta contienen la unidad de la escala.

Si por ejemplo, BF=30, AB=5, *nr*=24, *mn*=4; se tendrán las dos proporciones idénticas,

BF : AB : : *nr* : *mn*.
30 : 5 : : 24 : 4.

Así se pueden representar las razones y las proporciones de las líneas por las razones y las proporciones de los números, y recíprocamente.

Si dividimos 30 por 5, saldrá un cuociente 6 que es el valor de la primera razon. Si dividimos 24 por 4, saldrá un cuociente 6 que es el valor de la segunda razon. Siendo iguales las dos razones hay una proporcion. Si dividimos 5 por 30 saldrá el cuociente un *sesto*. Si dividimos 4 por 24 saldrá por cuociente un *sesto*; así cuando dos razones son iguales tambien lo son las razones *inversas*.

La proporcion 30 : 5 : : 24 : 4 dará á la vez

$$\frac{30}{5}=\frac{24}{4} \text{ y } \frac{5}{30}=\frac{4}{24}.$$

Si multiplicamos por 24 los dos términos de la igualdad.

$$\frac{5}{30}=\frac{4}{24} \text{ tendremos } \frac{5}{30}\times 24=4.$$

Pero 5 y 24 son los *medios*, 30 y 4 son los *estremos*. Luego *un estremo es igual al producto de los medios dividido por el otro estremo.*

Se demuestra del mismo modo que cada uno de los medios es igual al producto de los dos estremos dividido por el otro medio.

Luego en toda proporcion conocidos tres de sus términos siempre se puede hallar el cuarto por la regla que acabamos de indicar; esta es la ***regla de tres,*** llamada así porque con tres términos de una proporcion, la dicha regla dá el cuarto. La ***regla de tres*** tiene contínuo uso en los cálculos de la hacienda, del comercio y de la industria.

La geometría tambien tiene su regla de *tres*.

* Si se conocen tres líneas (A), (B), (C), fig. 6, es fácil hallar otra D, tal que se tenga (A) : (B) : : (C) : (D). *

* Póngase (C) = PR, al estremo de (A) = OP. Del estremo O se tira la recta OM en una direccion cualquiera: se toma desde O la longitud OQ=(B); se tira PQ; despues RS paralela á PQ. Entonces se tiene

OP : OQ : : PR : QS.
ó (A) : (B) : : (C) : (D).

Cuando los dos medios son iguales entre sí la longitud ó el número que los representa es lo que se llama una *media proporcional* entre los estremos. Así en la proporcion,

2 : 4 : : 4 : 8.

4 es la media proporcional entre los dos estremos 2 y 8.

En la geometría dadas dos longitudes se halla fácilmente su media proporcional, lo que dentro de poco esplicaremos.

De los triángulos semejantes. Si dos triángulos ABC, *abc*, fig. 7, tienen sus lados correspondientes *paralelos*, estos lados son *proporcionales* y los triángulos son *semejantes*. Así

AB : *ab* : : BC : *bc* : : AC : *ac*.

* Para demostrarlo transportaremos *abc* sin mudar la direccion de sus lados, de manera que el punto *b* caiga en A; prolonguemos despues *ac* y BC hasta que

se encuentren en un punto m, se tendrá $AC = cm$, $Cm = bc$ (1), como paralelas comprendidas entre paralelas.

Pero siendo paralelas AC y cm, Cm y bc se tiene

$$AB : ab :: cm = AC : ac,$$

$$AB : ab :: BC : Cm = bc.$$

Luego, en fin, $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$.

Si dos triángulos ABC, abc, fig. 8, estan de tal modo dispuestos y configurados que AB sea perpendicular á ab, BC á bc, AC á ac, digo que los dos triángulos son *semejantes*

* En efecto, sin alterar nada al triángulo abc hagámosle girar la cantidad de un ángulo recto alrededor del punto a, entonces ac caerá en ac' en una posicion paralela á Ac; lo mismo sucederá respecto de ab' y de $b'c'$. Luego el triángulo $ab'c'$ tendrá sus lados *paralelos* á los de ABC, y los dos triángulos serán semejantes. Por consecuencia tambien ABC y abc son semejantes.

Cuando dos triángulos tienen sus lados proporcionales, sus ángulos correspondientes serán iguales, y los triángulos son semejantes. En efecto, supongamos que los dos triángulos ABC, $ab'c'$ fig. 7, no tengan otras relaciones que estas:

$$AB : a'b' :: Ac : a'c' :: BC : b'c'$$

Yo imagino otro triángulo abc que tenga el lado $ab = a'b'$ y ademas sus tres lados respectivamente paralelos á AB, BC, AC.

Entonces se tiene

$$AB : ab :: AC : ac :: BC : bc.$$

Luego $$a'c' = \frac{AC}{AB} a'b' \ldots ac = \frac{AC}{AB} ab. \ldots$$

$$b'c' = \frac{BC}{AB} a'b' \ldots bc = \frac{BC}{AB} ab \ldots$$

(1) *El signo* $=$ *se lee* igual á

Luego si $a'b' = ab$ es necesario que $a'c' = ac$ y que $b'c' = bc$.

Luego los dos triángulos abc, $a'b'c'$ tienen sus tres lados respectivamente iguales y son por consecuencia iguales: luego los ángulos $a' = a = A$, $b' = b = B$, $c' = c = C$.

Así *cuando dos triángulos tienen sus lados proporcionales, solo por esto los ángulos opuestos á los lados proporcionales son iguales y los triángulos son semejantes.*

Cuando dos triángulos ABC, abc tienen los lados AB, AC proporcionales á ab, ac y el ángulo $A = a$ los dos triángulos son semejantes; porque poniendo el ángulo a sobre A, la proporcion $AB : ab :: AC : ac$ exige que AC y ac sean paralelas; entonces los tres lados son paralelos.

Si en la figura 6 se tiran desde el punto O tres líneas rectas OPR, OQS, OTU, cortando las dos paralelas PTQ, RUS, se tendrá sucesivamente á causa de los triángulos semejantes.

OPT, ORU; 1.°.... $OT : OU :: PT : RU$,
OQT, OSU; 2.°.... $OT : OU :: QT : SU$,
Luego en fin.... $PT : RU :: QT : SU$.

Esto es decir que las partes PT, QT, RU, SU de dos paralelas cortadas por tres rectas que salen de un mismo punto son proporcionales. La recíproca de este principio es igualmente verdadera.

Al presente podemos estender nuestras ideas y demostrar que *dos polígonos que tienen sus lados correspondientes paralelos y proporcionales son semejantes.*

* Sean las figuras ABCDEFGA, $abcdefga$, fig. 9, que tengan sus lados correspondientes, proporcionales y paralelos. Así

$$AB : ab :: BC : bc \ldots :: m : 1.$$

Los ángulos correspondientes formados por líneas paralelas dos á dos, serán iguales. Luego el ángulo $b = B$. Tiremos las líneas AC, ac, los dos triángulos ABC, abc serán semejantes porque tienen un ángulo B igual á b

comprendidos entre dos lados proporcionales. Luego AB : *ab* : : BC : *bc* : : AC : *ac* : : *m* : **1**. Tirando despues AD y *ad*, los triángulos ACD y *acd* tambien serán semejantes; pues que AC : *ac* : : CD : *cd* : : *m* : **1**, y ademas los ángulos ACD, *acd* son iguales por tener sus lados paralelos. Luego AD es paralela á *ad*. *

Continuando el raciocinio que hemos comenzado se acabarian de descomponer los polígonos en *triángulos semejantes*.

Por consecuencia en sabiendo formar triángulos semejantes á otros se podrán formar por partes polígonos semejantes á otros, cualquiera que sea la complicacion de las figuras.

Compás de proporcion, fig. **10**. Es un instrumento que se emplea para facilitar las reducciones proporcionales, y se compone de dos reglas iguales graduadas igualmente. (Llámase tambien *pantometra*).

* Para reducir las dimensiones de una figura en la razon de una línea dada E á una línea dada F, se tomará sobre el lado AB la longitud AM igual á E. Se notará el número de la graduacion correspondiente á M, y el punto N en que se halla el mismo número sobre la otra pierna del compás de proporcion. Con un compás ordinario se tomará por abertura de sus piernas la longitud F. Hecho esto se pondrá la una de las piernas del compás ordinario en M; despues se abrirá ó cerrará el compás de proporcion hasta que la distancia MN iguale á F, entonces es evidente que toda longitud A**1**, A2, A3,.... sobre los dos brazos debe corresponder á las distancias **1**.**1**, 2.2, 3.3,.... tales que se tengan las proporciones siguientes E : F : : AM : MN : : A**1** : **1**.**1** : : A2 : 2.2 : : A3 : 3.3....*

* Se podrá, pues, con un compás ordinario tomar inmediatamente las longitudes reducidas **1**.**1**, 2.2, 3.3,.... que corresponden á las longitudes A**1**, A2, A3.... *

Cuando no se tiene un compás de proporcion, se hace uno trazando dos líneas AB, AC, fig. **11**, de la manera siguiente. Tírase una línea AB=E; despues del punto B como centro con una abertura de compás BC=F, se describe el arco *m*C*n*; del punto A como centro se describe el arco BDC y por el punto C en que este nuevo arco corta al primero *m*C*n* se tira AC. Supongamos que se quiere reducir en la razon de E á F, una longitud A*g* cualquiera. Del punto A como centro descríbase el arco *gkh*; la distancia de los puntos *g*, *h*, será la longitud reducida, porque se tiene

E : F : : AB : BC : : A*g* : *gh*.

De los polígonos regulares semejantes. Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes. En efecto si son iguales entre sí los lados de cada uno, serán evidentemente proporcionales dichos lados; y los ángulos de estos polígonos, ángulos que no dependen de la longitud sino del número de los lados, serán los mismos en los dos polígonos.

Los contornos de los polígonos semejantes son entre sí como los lados.

A medida que los lados de un polígono se multiplican, el polígono se diferencia menos del círculo en que está inscripto.

Luego los círculos deben ser considerados como figuras semajantes, esto es, como figuras cuyas líneas semejantemente situadas son proporcionales.

Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios.

Si en dos círculos se inscriben dos polígonos regulares de un mismo número de lados *abcdefa*, ABCDEFA, fig. **12**, la razon de las líneas proporcionales en las dos figuras será **1**.° de los radios de los dos círculos; 2.° de los lados de los dos polígonos; 3.° de los contornos de estos polígonos; y 4.° de las circunferencias de los dos círculos.

Si en el círculo, fig. **13**, se tira un diámetro AOB; y de un punto cualquiera C de este diámetro se tira CP perpendicular á esta línea, y se trazan las rectas AP y PB se formará el triángulo APB, rectángulo en P. Este triángulo rectángulo es semejante á cada uno de

los triángulos parciales APC, PBC de que se compone.

En efecto, el ángulo agudo A es comun á los dos triángulos rectángulos APB, APC; el otro ángulo agudo es igual á un ángulo recto menos A; luego los tres ángulos de los dos triángulos son respectivamente iguales: luego estos triángulos son semejantes.

De la misma manera, el ángulo agudo B es comun á los dos triángulos rectángulos APB, PCB. Luego son semejantes; lo que da las proporciones siguientes:

AB : AP : : AP : AC,
AB : BP : : BP : BC,
AC : CP : : CP : CB.

Luego: 1.° En un triángulo rectángulo APB, el menor lado de la izquierda AP es media proporcional entre la hipotenusa AB y la parte AC de esta hipotenusa á la izquierda de la perpendicular PC.

2.° El menor lado de la derecha PB es medio proporcional entre la hipotenusa AB y la parte BC de esta hipotenusa á la derecha de la perpendicular.

3.° La perpendicular CP es media proporcional entre las dos partes CA, CB de la hipotenusa.

En fin siendo la hipotenusa un diámetro del círculo, y siendo CP la mitad de la cuerda perpendicular á este diámetro; y siendo AP, PB, otras dos cuerdas tiradas por el estremo del diámetro.....

1.° La cuerda de la izquierda AP, es media proporcional entre el diámetro AB y la parte AC de este diámetro á la izquierda de la mitad de la cuerda perpendicular al diámetro.

2.° La cuerda de la derecha BP es media proporcional entre el diámetro AB y la parte BC de este diámetro á la derecha de la mitad de la cuerda perpendicular al diámetro.

3.° La mitad de la cuerda CP es media proporcional entre las dos partes del diámetro situadas á su izquierda y á su derecha.

Estas propiedades tienen el mayor uso en la valuacion de los efectos y del movimiento de las máquinas.

LECCION SESTA.

De la superficie de las figuras planas terminadas por líneas rectas y circulares.

Cuando se han de medir las superficies terminadas por líneas rectas, y aun por líneas curvas, se toma por unidad de medida una figura muy sencilla y no menos fácil de construir que de subdividir: tal es el *cuadrado cuyo lado sea igual á la unidad de longitud.*

Antes de todo esplicaremos como con este cuadrado se puede medir otro mayor, esto es, como se puede saber cuántas veces el cuadrado mayor contiene al menor.

Tantas veces como un lado del menor está contenido en el lado del mayor, otras tantas fajas paralelas se podrán formar en el cuadrado mayor que tengan el lado menor por ancho, y por largo el lado mayor. Y tantas veces como el lado menor esté contenido en el mayor, otras tantas veces cada faja contiene al cuadrado menor. Por ejemplo, si el lado mayor contiene diez veces al menor, se dividirá el cuadrado mayor en diez fajas que tengan el lado menor por ancho y diez veces este lado por largo; cada faja tendrá, pues, diez veces la superficie del cuadrado menor, y diez veces diez será el número de cuadrados menores contenidos en el menor.

Con el mismo raciocinio se haria ver que tomando el lado de un cuadrado por unidad de longitud este cuadrado estará contenido en otro cuadrado que tenga por lado.

1.... 1 veces 1 igual	1	6.... 6 veces 6 igual	36
2.... 2 veces 2 igual	4	7.... 7 veces 7 igual	49
3.... 3 veces 3 igual	9	8.... 8 veces 8 igual	64
4.... 4 veces 4 igual	16	9.... 9 veces 9 igual	81
5.... 5 veces 5 igual	25	10.... 10 veces 10 igual	100

Los números **1**, 4, 9, **16**, 25, 36, &c. se llaman los *cuadrados* de **1**, 2, 3, 4, 5, 6.... ; porque representan el número de cuadrados que tienen por lado la unidad de longitud contenidos en la superficie de los cuadrados que tienen por lados **1**, ó 2, ó 3, ó 4, &c. Los números **1**, 2, 3, 4, que representan la cantidad de unidades de longitud contenidas en cada lado de los cuadrados se llaman las raices de estos cuadrados.

Si el cuadrado que se trata de medir es menor que el que se ha tomado por unidad de medida es menester subdividir éste. Por ejemplo, se dividirán sus lados en diez partes iguales, y se formarán cien cuadrados pequeños iguales; cada uno de los cuales podrá servir de unidad de medida. Si esta segunda unidad es demasiado grande todavía se dividirá del mismo modo en centésimos que serán las cien veces ciento, ó diez milésimos de la unidad primitiva, y así en adelante (véase en el tomo 2.º la leccion *sobre las medidas*).

Despues de haber determinado la superficie de un cuadrado tomado aisladamente combinemos dos á dos los cuadrados, y preguntémonos cómo la geometría puede representar *su suma ó su diferencia*; esto es, cómo puede *construir un cuadrado igual en superficie á la suma ó á la diferencia de dos cuadrados dados*.

* Sean ABCD, fig. **14**, *mnpq*, fig. **15**, los dos cuadrados propuestos. Construyamos un triángulo rectángulo tal que el ángulo recto I, fig. **16**, esté entre dos lados $XI = mn$, $IZ = AB$. Si se construyen cuadrados con XI, IZ, como lados, se tendrá $XI\ ab = mnpq$, y $IZ\ cd = ABCD$. Yo digo ahora que el mayor cuadrado $XZ\ ef$, construido sobre XZ como lado, es igual á la suma de los dos cuadrados propuestos. *

* Hemos manifestado (leccion II) que en un triángulo rectángulo XIZ, fig. **16**, si se baja del ángulo recto sobre el lado mayor la perpendicular IU, se tiene (**1**)

$XU : XI :: XI : XZ$, luego $XI \times XI = XI^2 = XU \times XZ$,
$ZU : ZI :: ZI : XZ$, luego $ZI \times ZI = ZI^2 = ZU \times XZ$.

Luego XI^2 mas ZI^2, esto es, la suma de los dos cuadrados $XIab$, $ZIcd$, es igual á XU mas ZU, esto es á XZ multiplicado por XZ, que es la medida del cuadrado $XZef$. Así el cuadrado mayor equivale á la suma de los otros dos.

Luego *en un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre el mayor lado es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados.*

Si se propusiese hallar un cuadrado equivalente á la diferencia de otros dos se haria un triángulo rectángulo, que tuviese por lado mayor XZ, fig. **16**, el del mayor cuadrado, y por uno de sus lados menores XI el del cuadrado menor conocido. El tercer cuadrado construido con el tercer lado IZ del triángulo rectángulo seria igual á la diferencia de los otros dos cuadrados; puesto que añadido con el menor debe ser igual al mayor.

Observando que 3 veces $3 = 9$, que 4 veces $4 = 16$, que 5 veces $5 = 25$ y que 9 mas **16** son iguales á 25, se ve que 3, 4, 5 son los lados de un triángulo rectángulo. Los artistas emplean frecuentemente esta propiedad para tirar una recta IZ perpendicular á otra XI; para esto dividen XI en tres partes, despues toman $IZ = 4$, $XZ = 5$ de estas partes, y acaban el triángulo XIZ, en el cual IZ es la perpendicular buscada.

Midamos ahora la superficie de las figuras que se separan cada vez mas de la forma del cuadrado.

La superficie del rectángulo es igual al producto de la base por la altura.

* Para probarlo dividamos MQ, fig. **17**, en partes iguales al lado AB del cuadrado ABCD tomado por unidad. Por los puntos de division tiremos rectas para-

---

(**1**) *Para representar el cuadrado que tiene un lado igual á AB, se escribe AB^2 y la superficie de este cuadrado ABCD es por consecuencia AB^2 que es igual á AB multiplicado por AB.*

lelas á MN, que dividirán el rectángulo en fajas que tengan todas MN por longitud y la misma latitud que el cuadrado. Cada faja contiene la superficie de tantos cuadrados ABCD como las veces que MN contiene á AB. Luego estando MN espresada por números, cuando AB es la unidad, el número de cuadrados ABCD que el rectángulo MNPQ contiene, está representado por la base MN multiplicada por la altura MQ. *

En las artes ocurre con frecuencia ejecutar un cuadrado cuya superficie sea equivalente á la de un rectángulo MNPQ, y se hace del modo siguiente:

* Si se ponen los lados MQ, MN, fig. 18, de manera que no formen mas que una línea única QN, y sobre ésta como diámetro se describe un semicírculo, y del punto M se levanta la perpendicular MR al diámetro QN, prolongándola hasta el contorno del semicírculo, se tendrá (leccion V.):

$QM : MR :: MR : MN$, de donde sale $QM \times MN = MR^2$.

Así el cuadrado construido sobre MR equivale al rectángulo MNPQ, puesto que estas superficies tienen la misma medida. *

La superficie de un paralelógramo LMNO, *fig.* 19, *es igual al producto de su base por su altura.*

* Para demostrarlo de los puntos M, N, tiremos MQ, NP, perpendiculares á MN, hasta OLQ. Los dos triángulos MQL, NOP son iguales; porque MQ=MP (como paralelas comprendidas entre paralelas) y que los ángulos correspondientes son iguales. Luego el rectángulo MNPQ, comparado con el paralelógramo MNOL, contiene en mas el triángulo LMQ, y en menos el triángulo igual ONP; luego la superficie del paralelógramo como la del rectángulo se mide por *el producto de la base* MN *por la altura* PN. *

Cuadrado de multiplicacion: éste da á conocer en cifras la superficie de un rectángulo ó de un paralelógramo cuyos dos lados no pasan de diez.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La columna segunda indica la superficie de los rectángulos ó paralelógramos cuya altura es dos y la base es 1, 2, 3, 4.... &c.; la columna tercera indica la superficie de los rectángulos ó de los paralelógramos cuya altura es tres y la base 1, 2, 3, 4...., &c. *Conviene que los artesanos tengan una tabla igual colgada en su obrador y la aprendan de memoria; este conocimiento es indispensable para hacer cualquiera multiplicacion.*

La superficie de un triángulo ABC, *fig.* 20, *es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

* En efecto si tiramos CD paralelas á AB, y AD paralela á BC, el nuevo triángulo ACD es igual al primero ABC; pero ABCD forma un paralelógramo cuya superficie es igual á AB base del triángulo ABC×por su altura CE; luego la mitad de este producto es la superficie del triángulo.

Puesto que siempre se puede descomponer en triángulos una figura cualquiera terminada por líneas rectas se hallará inmediatamente la medida de la superficie

de todo polígono irregular ó regular, tomaráse en cada triángulo la mitad del producto de su base por su altura, y la suma de todos los productos dará la medida de la superficie buscada. Esta aplicacion es una de las que manifiestan la importancia del estudio de los triángulos en la geometría, y especialmente en la *agrimensura*. Empezemos esta aplicacion por la medida del trapecio.

La superficie del trapecio es igual á la mitad de la suma de sus dos bases multiplicada por su altura.

* El trapecio ABCD, fig. 21, cuya altura es *mn*, quedará dividido por la diagonal AC en dos triángulos ABC, ACD que tendrán respectivamente por medida: el primero $\frac{1}{2}$ AB$\times$*mn*; el segundo $\frac{1}{2}$ DC$\times$*mn*. La suma de estos dos productos será la mitad de AB mas CD multiplicado por *mn*; lo que se escribe asi, $\frac{1}{2}$ (AB+CD) *mn*. *

Teniendo este producto se puede inmediatamente *hallar un cuadrado equivalente al trapecio.*

* Se medirán AB+CD, fig. 21, que se representarán por la línea única MN, fig. 18, se tomará MQ=$\frac{1}{2}$ *mn*; se trazará el semicírculo QRN; y la perpendicular MR será el lado del cuadrado buscado. *

La superficie de un polígono regular es igual á la mitad de su contorno multiplicada por la distancia de su centro á uno de sus lados.

* Si del centro O, fig. 16, del polígono ABCD.... tiramos líneas rectas á los vértices, le dividiremos en triángulos iguales AOB, BOC, COD.... Sea O*m* la distancia del centro á cada lado y por consecuencia la altura de estos triángulos. Se tendrá por medida de uno de ellos y por consecuencia de todos los demas $\frac{1}{2}$ AB$\times$O*m*; la superficie total será

$\frac{1}{2}$ (AB+BC+CD....) O*m*.

ó $\frac{1}{2}$ (ABCD....) O*m*.

El polígono regular se diferencia tanto menos del círculo en que está inscripto, cuanto mayor es el número de sus lados; y la diferencia llega á ser menor que cualquier cantidad dada segun se aumenta mas el número

de sus lados. Luego el círculo puede considerarse como un polígono de tan gran número de lados que la perpendicular O*m* no se diferencie del radio OA. Luego....

La superficie del círculo es igual á su circunferencia multiplicada por la mitad de su radio, ó á su semicircunferencia multiplicada por su radio.

Imposibilidad de la cuadratura del círculo. Por medio de la solucion indicada, fig. 18, seria siempre fácil hallar un cuadrado cuya superficie fuese igual á la de un círculo dado si se pudiese hallar una línea recta exactamente igual en longitud á la circunferencia de un círculo del cual se conoce el radio: pero no se puede tener la medida de tal línea recta, y el problema de hallar el cuadrado equivalente al círculo (lo que se llama la *cuadratura del círculo*) pertenece al orden de las cuestiones cuya solucion rigurosa es imposible. Importa mucho que los alumnos no consuman sus facultades en esfuerzos que no podrán tener buen éxito.

Se puede dar el valor aproximado de la circunferencia y de la superficie del círculo en números, representando

El radio por......... 100, 1000, 10,000, 100,000 &c.
La circunferencia por 628, 6283, 62,831, 628,313 &c.
Y la superficie por... 314, 3141, 31,415, 314,156 &c.

Si en lugar de la superficie total del círculo nos limitásemos á la de un *sector* AOB, fig. 22, cuyo arco sea la mitad, ó el tercio, ó el cuarto &c. de la circunferencia, veríamos que este sector es tambien la mitad, el tercio, el cuarto &c. de la superficie del círculo. Para tener su medida basta multiplicar por la mitad del radio la longitud del arco A*n*B comprendido entre los lados OA, OB. Si de este producto se resta el de $\frac{1}{2}$ AB$\times$O*n*= superficie del triángulo OAB, se tendrá la superficie del *secmento* A*n*B.

Comparacion de la superficie de las figuras semejantes. 1.° De los triángulos.

La razon de la superficie de dos triángulos semejantes es igual á la razon del cuadrado de las líneas, correspondientes ú homólogas.

* Sean dos triángulos AOB, *aob*, tales que su base sea igual á la mitad de su altura; un cuadrado ABCD, *abcd* hecho sobre su base como lado, tendrá igual superficie que ellos. Si crecen ó menguan proporcionalmente las alturas quedando la misma base, se irán formando triángulos semejantes XAB, *xab*, que conservando la misma base se aumentará ó disminuirá su superficie en la misma razon. Luego estando primitivamente representada la razon de las superficies por los cuadrados ABCD, *abcd* de las bases, lo estará en todos los casos. *

Todas las figuras semejantes pueden descomponerse en un mismo número de triángulos semejantes que estan entre sí como los cuadrados de dos líneas correspondientes. Luego....

Las superficies de las figuras semejantes (terminadas por líneas rectas) son entre sí como los cuadrados construidos sobre dos líneas correspondientes ú homólogas.

* Así siendo semejantes los dos polígonos ABCDEFA, *abcdefa*, fig. 25, sus superficies serán como los cuadrados ABMN, *abmn* formados sobre dos lados correspondientes AB, *ab*. *

Del mismo modo se demuestra que los círculos, que son figuras semejantes, *tienen sus superficies proporcionales á los cuadrados construidos sobre sus radios ó sobre sus diámetros como lados.*

El uso de estas proporciones es frecuentemente muy cómodo. La superficie de un círculo cuyo radio es igual á la unidad no puede espresarse ni aun aproximativamente sino por números complicados si se quiere un poco de exactitud. Pero las razones de las superficies podrán darse con frecuencia con una estrema sencillez.

Vamos ahora á dar á conocer dos bellísimas propiedades de la superficie de los polígonos regulares y de los círculos; pero sin dar la demostracion, porque se funda en métodos científicos menos elementales.

A igual contorno entre todas las figuras que tienen un número dado de lados, el polígono regular es el que tiene la mayor superficie.

A igual contorno, cuantos mas lados hay en un polígono regular, tanto mayor es su superficie.

A igual contorno, todas las figuras terminadas por un número cualquiera de lados, rectos ó curvos, tienen menos superficie que el círculo.

Aplicaciones. El conocimiento de estas propiedades es importante en la economía de muchas artes.

Así la cantidad de plomo que se necesita emplear en las vidrieras góticas de un espacio limitado es *la menor posible*, si los vidrios teniendo un número *dado* de lados son de *figura regular*.

Así cuando hay que hacer tubos para la conducion de aguas, de gases &c., y que estos tubos hayan de dejar un paso libre á un volumen de fluido determinado, *si se hacen circulares*, la cantidad de madera ó de metal empleada en estos tubos *es la menor posible.*

En la arquitectura, dadas la altura y contorno de un edificio y por consecuencia la estension de sus paredes esteriores, el espacio que se puede encerrar con una misma cantidad de fabrica es tanto mayor cuanto mas se acerque el edificio á la forma de un polígono regular, y de un polígono cuyo número de lados sea mayor.

Consideremos la superficie indefinida del plano sobre el cual hemos trazado las diversas figuras de que acabamos de determinar la medida. Cuando una recta tiene dos puntos en un plano está toda en dicho plano. Esta propiedad sirve en las artes para construir superficies planas, y para correr espacios planos.

Aplicacion á la alfarería. Si se quiere, por ejemplo, como en el arte del alfarero, terminar en superficie plana una masa de tierra cualquiera, se colocan los guias paralelas ó un cuadro plano MNPQ, fig. 26; despues con una regla recta ST, que se apoya á la vez en las dos guias MN, PQ, se va adelante y se separa ó se comprime toda la tierra que sobresale mas que el plano que pasa por MN y PQ. No es indispensable que el cuadro MNPQ esté formado con rectas paralelas; basta

que estas rectas si se quiere prolongarlas se encuentren en cualquiera parte.

Aplicacion á cortar las estacas. Las sierras para cortar las estacas en un plano horizontal cuya profundidad debajo del agua es dada, tienen su movimiento arreglado por dos guias MN, PQ, fig. 26, igualmente distantes del plano horizontal en que se han de cortar las cabezas de todas las estacas. La sierra misma *st* es una recta transversal representada por su paralela ST. Esta paralela se mantiene á una distancia invariable de la sierra por un cuadro rectangular ST*ts*, y se apoya sobre MN y PQ, y así la sierra describe un plano *mnpq* paralelo á MNPQ.

El carpintero de *taller*, para poner plana una tabla, usa de la herramienta que llaman *cepillo*. Lo primero que hace es igualar los cantos de la tabla, esto es, ponerlos bien rectilíneos con su cepillo, cuya caja está en línea recta, y cuyo hierro va cortando todo lo que sobresale en la tabla, á fin de que resulte un contacto exacto entre la tabla y la batalla del cepillo. Despues cepilla transversalmente de un lado á otro para trazar una sucesion de rectas intermedias que pasan por las de los bordes.

El *aserrador* y el *carpintero* de ribera señalan por arriba y por abajo en el madero de que quieren poner plana una cara la línea del plano que quieren ejecutar; y luego dirigen sobre estas dos líneas, el uno la sierra y el otro la azuela.

Hasta ahora no hemos considerado mas que un plano á la vez, y líneas trazadas sobre este plano. Comparemos sucesivamente el plano con líneas que no esten todas comprendidas en él, y varios planos entre sí. Una recta puede ser perpendicular, oblícua ó paralela á un plano dado.

* Sea AB, fig. 27, la línea mas corta que se puede tirar de un punto A al plano MNPQ. Esta será por consecuencia la línea mas corta que se puede tirar del punto A á toda línea recta trazada en el plano. Luego

será perpendicular á todas las líneas rectas BE, BF trazadas sobre el plano desde el pie B de dicha perpendicular. La recta AB se dice que es perpendicular al plano MNPQ. *

Luego, 1.°, *la perpendicular tirada de un punto á un plano es la distancia mas corta del punto al plano; 2.° es perpendicular á todas las líneas tiradas por su pie en este plano.*

Por consecuencia si se toma una escuadra y va dando vuelta sobre uno de los lados del ángulo recto, el otro lado describirá un plano.

En la construccion de los instrumentos que la óptica suministra á la astronomía, á la navegacion &c., se hace uso frecuente de esta última propiedad geométrica.

Si AB, fig. 27, es perpendicular al plano MNPQ toda línea AD, AF tirada del punto A á una de las líneas DBF, trazada sobre el plano, será *oblicua* respecto de la línea y respecto al plano. Así *respecto del plano como respecto de la línea recta todas las oblicuas* AD, AF, *son mas largas que la perpendicular* AB, *y tanto mas cuanto mas se alejan de dicha perpendicular.*

Supongamos que se hayan tirado del punto A todas las oblícuas posibles sobre la línea recta DBF trazada en el plano y que pasan por el pie B de la perpendicular; cada punto D, F.... de la recta DBF va á describir un círculo en el plano MNPQ, y todos los puntos de cada círculo estarán á la misma distancia de cada punto A de la perpendicular (1).

Llámase eje de un círculo la perpendicular al plano de este círculo, tirada por el centro. Luego este eje es perpendicular á todos los radios.

El eje de una rueda es perpendicular al plano de

---

(1) *Si se prolonga* BA *en* Ba=BA, *los puntos* a *y* A *estarán igualmente apartados de cada punto* D, E *del plano y de los círculos que acabamos de trazar.*

ella. Por consecuencia cuando la rueda gira sobre su eje cada una de sus partes se mueve sin separarse de dicho plano. Así la rueda con respecto á los objetos que la rodean no muda de posicion, y solo sus diversos puntos son los que toman la posicion los unos de los otros.

En este principio de geometría está fundado el movimiento de las *piedras de molino*. Se ponen dos piedras sobre un mismo eje cuyos planos son por consecuencia paralelos: el uno queda fijo en tanto que el otro está inmóvil sobre este eje. Pero dando vueltas la rueda movible de manera que su plano inferior se mueva sobre sí mismo, queda en toda su estension y siempre á la misma distancia del plano superior. Si pues esta distancia de las ruedas está calculada de manera que los granos de trigo no puedan pasar por ellas sin que queden deshechos, sucederá lo mismo en todos los puntos entre las dos piedras.

Aquí se ve la suma ventaja, digo mas, la *necesidad* de la exactitud en la ejecucion de las máquinas. Si el paralelísmo de las ruedas no fuese perfecto; si el árbol de la piedra movible no fuese rigorosamente perpendicular al plano de estas ruedas; si al empezar su movimiento pudiese inclinarse un poco hácia la derecha ó hácia la izquierda, en todos estos casos los dos planos de las piedras no permanecerian constantemente á la misma distancia. En el parage donde estuviesen muy juntos el trigo estaria mas deshecho, se calentaria y se echaria á perder; en otras partes no estaria molido, y las ruedas se moverian en un vacío. Por consecuencia aquí la exactitud es mas que una cosa de lujo y de satisfaccion intelectual, puesto que es una condicion impuesta por la necesidad misma para el logro de la operacion.

Aplicacion al torneado. Las propiedades que acabamos de esponer se emplean en las artes para describir los círculos por medio del torno. Este es un instrumento que presenta dos puntos fijos, á los cuales se sujeta el cuerpo que hay que tornear cuando se tiene una herramienta cortante en una posicion inmóvil y se hace girar el cuerpo: la herramienta corta las partes demasiado salientes del cuerpo, y traza un círculo que tiene por eje la línea recta que pasa por los dos puntos fijos y que ademas tiene su centro en esta línea recta.

Si se supone que el corte de la herramienta adelanta por grados yendo perpendicularmente á dicha línea recta, todos los círculos que se forman sucesivamente con el corte de la herramienta estarán situados en un mismo plano perpendicular á la recta que pasa por las dos puntas del torno. De esta suerte se puede hacer uso del torno para ejecutar un plano.

Tal es el medio que se emplea en las fábricas de máquinas, donde hay necesidad de cortar de plano, ya placas metálicas, ya las cabezas de los cilindros para que ajusten por sus estremos con suma exactitud.

Aplicacion á la máquina de Bramah, para cortar superficies planas. Bramah hace dar vueltas alrededor de un eje vertical y fijo una rueda horizontal que tiene varias herramientas cortantes. Estas herramientas no sobresalen todas igualmente debajo el plano del círculo, sino que estan en grupos de cinco ó seis que sobresalen gradualmente mas y mas. La pieza de madera que se ha de poner plana está colocada sobre un carro horizontal que va adelante y pasa por debajo de la rueda dicha. Los filos de cada grupo van recortando la pieza de madera, de manera que el menos saliente de todos forma primero una raya, y sucesivamente la van profundizando los otros cuatro ó cinco del grupo. Despues de lo cual continuando la pieza en ir adelante, otro nuevo grupo de cinco ó seis filos pone plana la parte que sigue. Cuando todos los filos distribuidos en el contorno de la rueda han hecho sobre la pieza de madera sus ranuras respectivas muy estrechas, un cepillo puesto en la rueda á la altura de los filos mas salientes pasa sobre la pieza de madera que han hecho sus surcos todos los filos, y haciendo desaparecer las

asperezas de estos surcos acaba de poner plana la pieza.

Dos perpendiculares AB, CD, fig. 28, *al mismo plano* MNPQ, *son paralelas entre sí.*

* Para demostrarlo, tiremos por los pies BD de estas perpendiculares la recta BD sobre el plano; despues en este plano por el medio O de BD tiremos la perpendicular EOF. *

* Haciendo OE = OF, los dos puntos B, D estarán á igual distancia de E y de F. Ademas cualquier punto A, C de las líneas AB, CD, perpendiculares al plano MNPQ, estará igualmente distante de los puntos E y F. En efecto, si tiramos FD y ED, estas dos oblícuas estarán igualmente distantes de la perpendicular OD sobre EOF y serán iguales. De la misma manera siendo CE, CF dos oblícuas igualmente distantes de la perpendicular CD del plano serán iguales. Por último AE, AF son iguales por la misma razon. Así las perpendiculares AB, CD pertenecen al plano único que contiene todos los puntos igualmente distantes de los dos puntos fijos EF. Luego AB, CD, perpendiculares á la misma recta BD, se hallan en un mismo plano. Luego son paralelas. *

El plano horizontal es, como se sabe, el de la superficie de las aguas paradas en el punto donde nos hallemos, y la perpendicular á este plano en lo que se llama la *vertical*. Por consecuencia en un mismo plano horizontal dado todas las verticales son paralelas.

El hilo á plomo es un hilo que se sostiene por un estremo, y en el otro tiene un plomo. En reposo este hilo, toma la direccion vertical del lugar en que nos hallamos. Puede pues servir para comprobar si en este parage un plano dado es horizontal. Basta para esto que poniendo un lado de una escuadra, segun la direccion del hilo, el otro lado se ajuste exactamente al plano en todas las direcciones posibles. Bastan dos posiciones para la verificacion, pues que dos líneas rectas son suficientes para terminar la posicion de un plano.

Recíprocamente teniendo la posicion de un plano horizontal se tendrá la vertical tirando una perpendicular á este plano; pero esta operacion no presentará tanta facilidad.

Llámanse *planos verticales* los planos que contienen una vertical toda entera en su superficie. Si de un punto cualquiera de un plano tal se tira una vertical, como es paralela á una primera vertical situada en este plano, debe hallarse toda ella en dicho plano.

Dos planos verticales se cortan necesariamente en una linea recta vertical; porque la vertical tirada por un solo punto en que se cortan los dos planos debe hallarse toda ella en el uno y el otro plano.

Son muchas las artes, sobre todo de las que pertecen á la construccion de los edificios que hacen frecuente uso de los planos horizontales, de los planos verticales y de las verticales.

En nuestras habitaciones los suelos, los techos, la junta inferior y superior de las hiladas de piedra de sillería, de ladrillo &c. en las paredes son planos horizontales.

Los planos de las paredes de fachada, de las interiores, y de los tabiques, son planos verticales, y las aristas ó esquinas formadas por las paredes por los lados de las puertas, ventanas &c., son verticales porque se hallan á la vez en dos planos verticales.

En el dibujo de la geometría descriptiva, del corte de piedras de la carpintería, y de la arquitectura en general, se supone que se ejecuta un dibujo en un plano horizontal; se supone que se ejecuta otro dibujo en un plano vertical; este es la *elevacion* ó alzado si este plano está fuera del edificio; y es el corte si dicho plano atraviesa el edificio.

Cuando una recta pasa por dos puntos A, C, fig. 29, igualmente distantes de un plano MNPQ, todos los demas puntos de esta recta AC estan á la misma distancia del plano.

* En efecto desde AC tiremos las paralelas AB, CD, EF, perpendiculares al plano MNPQ. Trazando la línea recta BFD, en este plano se tendrá AB = EF =

CD, cualquiera que sea la posicion del punto E. *

El conjunto de todas las rectas que salen del punto A, fig. 29, perpendicularmente á AB forma un plano. Luego todos los puntos de este plano tienen á AB por medida de su distancia al plano MNPQ. Así dos planos perpendiculares á una misma recta AB están en toda su estension á una misma distancia, y en todas partes las líneas AB, CD, perpendiculares al uno lo son al otro. Estas líneas miden la distancia mas corta de estos planos.

Dos planos NPQM, NPRS, fig. 30, que se encuentran se cortan en línea recta NP.

* En efecto si por dos de los puntos de encuentro N, P, se tira una línea recta, será menester que esté toda ella en los dos planos que contienen estos dos puntos. Esta recta será la línea comun á estos dos planos. *

* Puede suponerse que el plano NPQM está inclinado mas ó menos sobre NPRS; entonces resulta un ángulo mas ó menos grande comprendido entre NPQM, NPRS. Para medir este ángulo se hace de la manera siguiente: *

* Tírase, fig. 30, en el primer plano, la CA, y en el segundo la CB perpendicularmente á NP que es una recta comun á los dos planos. El ángulo formado por los dos planos está representado por el ángulo que forman estas dos rectas. *

Supongamos que el plano NPQM da vuelta alrededor de NP, como alrededor de un eje. Cada uno de los puntos de este plano describirá un círculo; y tambien el plano habrá corrido todo el espacio alrededor del eje cuando cada uno de sus puntos haya corrido la circunferencia completa de un círculo. Si se divide en partes iguales el espacio así corrido cada punto habrá descrito en cada parte el mismo número de grados. Este número podrá servir para medir el ángulo de los planos que dan vuelta alrededor de NP.

Los fabricantes de instrumentos de matemáticas ejecutan para los astrónomos, para los novegantes y para

los ingenieros geográficos, varios instrumentos que sirven para medir el ángulo que un plano forma con otro, y están generalmente ejecutados en virtud del principio que acabamos de dar á conocer. Un arco de círculo graduado AB, fig. 30, está determinado en un plano por los hilos de las alidadas perpendiculares CA, CB á los planos de que hay que medir la inclinacion. Un estremo B está fijo en uno de los planos, y el punto A en que el arco atraviesa el otro plano indica el número de grados de inclinacion de los dos planos.

Para determinar la direccion de los planos los referiremos ordinariamente á algun plano horizontal; la interseccion del plano inclinado sobre el plano horizontal es lo que se llama el trazo de este plano inclinado. Por consecuencia si se concibe perpendicularmente á este trazo: 1.° una horizontal; 2.° una recta situada sobre el plano inclinado, el ángulo que ellas formen entre sí representará el ángulo de los dos planos.

La línea inclinada CA, fig. 30, que acabamos de determinar, lo está mas que cualquiera otra línea trazada en el plano inclinado NPQM.

* Para demostrarlo tiremos la horizontal XOY paralela al trazo NP del plano inclinado COA perpendiculares á las dos paralelas, y CO medirá su distancia. Luego para descender de los puntos XOY del plano inclinado que todos estan situados á una misma altura á los puntos P, C, N...., que estan tambien en todos á nivel, el camino mas corto, esto es, la línea de la *mayor inclinacion* es OA perpendicular á las dos paralelas XOY, PCN. *

Cuando hablemos de las superficies curvas se verá que se han empleado ventajosamente las líneas horizontales, y las *líneas de la mayor inclinacion* para representar sobre los planos la figura de estas superficies.

Dos planos son perpendiculares uno á otro cuando forman á la derecha y á la izquierda ángulos iguales; estos ángulos medidos por líneas rectas perpendiculares son rectos.

Cuando una recta es perpendicular á un plano, todos

los demas planos que se tiran por dicha recta son perpendiculares al mismo plano.

* En efecto sea AB, fig. 31, perpendicular al plano MNPQ, y sea FGDE un plano que pasa por AB. Trazemos sobre MNPQ, AC perpendicular á GD, el ángulo BAC que mide la inclinacion de los dos planos será recto. Luego los dos planos serán perpendiculares uno á otro. *

Cuando dos planos paralelos entre sí estan cortados por un tercero, las dos rectas de interseccion son paralelas. En efecto, si asi no fuese se encontrarian en alguna parte; luego el primero y segundo plano de que ellas hacen parte se encontrarian y por consecuencia no serian paralelos.

Dos rectas paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales. En efecto si por estas dos rectas se pasa otro plano cortará á los dos primeros planos en dos nuevas paralelas que comprenden las dos primeras, pero paralelas comprendidas entre paralelas son iguales. Luego &c.

Dos rectas ABC, DEF, fig. 32, *cortadas por tres planos paralelos* NP, QR, ST, *estan cortadas en partes proporcionales.*

* Para demostrarlo tiremos A*ef*, paralela á DEF; los puntos E, F, *e*, *f* serán los dos puntos en que se encuentran estas rectas con los planos QR, ST, y se tendrá A*e*=DE; *ef*=EF. Pero las dos rectas ABC, A*ef* estan en un mismo plano que corta á los dos planos QR, ST en dos rectas paralelas B*e*, C*f*. Luego se tienen.

AB : BC : : A*e* : *ef* : : DE : EF.

Me quedaba que hablar de los ángulos sólidos como OABC, formados por tres rectas OA, OB, OC, que concurren en el punto O y representan tres porciones de plano AOB, BOC, COA. Este ángulo, como se ve, presenta tres ángulos ordinarios AOB, BOC, COA, y tres ángulos formados por los planos tomados dos á dos. La geometría descriptiva enseña los medios de conocer los ángulos formados con los planos por los ángulos formados por las líneas, y recíprocamente.



LECCION SETIMA.

De los sólidos terminados por planos.

Despues de haber esplicado las propiedades de la línea recta y del círculo hemos examinado sucesivamente las figuras que la industria puede componer con líneas rectas ó círculos, y ahora siguiendo un camino análogo examinaremos los sólidos que es posible terminar por planos y despues por formas circulares.

Dos cuerpos son iguales cuando se puede suponer que han salido de un mismo molde, como las copias de bustos y de bajos relieves moldeados en yeso.

Dos cuerpos son simétricos en forma y posicion cuando los puntos correspondientes de uno y otro pueden unirse con rectas paralelas, cuyo medio se halla en un plano que es perpendicular á ellas. Este es el *plano de simetría.*

Aplicaciones. A cada instante la industria tiene necesidad de producir *cuerpos simétricos* respecto de otros cuerpos, y cuerpos compuestos de dos partes simétricas. Tales son los edificios regulares, los templos, los palacios construidos de nueva planta.

Frecuentemente la geometría no es mas que un objeto de lujo ó de gusto en los productos de la industria destinados á la inmobilidad, como las casas, las iglesias &c.; pero es un objeto de necesidad en un sin número de cuerpos que han de ejecutar movimientos con igual facilidad hácia la derecha y hácia la izquierda. Aquí se ve por qué la naturaleza da á la mayor parte de los animales dos lados simétricos unidos por un plano dirigido en el sentido de su movimiento progresivo habitual. El ingeniero marítimo da á sus buques en virtud del mismo principio dos lados, estribor y babor, simé-

tricos respecto al plano que señala la direccion de la marcha progresiva. Los carruages son simétricos respecto á este plano en virtud de un principio análogo &c. (véase volumen 2.° Máquinas).

La barra y el liston es un sólido cuya longitud es indefinida, y cuyas caras planas estan limitadas por líneas rectas paralelas que se llaman *aristas*. Fórmase el prisma cortando la barra ó el liston por dos planos paralelos. Cada seccion que se llama *base* es un polígono, cuyo número de lados es igual al número de las caras de la barra ó del liston. El prisma es *recto ú oblicuo* segun que las bases son *perpendiculares ú oblicuas* respecto de las aristas, y es *truncado* cuando las bases no son paralelas.

El prisma recto es *simétrico* respecto de un plano que corta en un ángulo recto y por enmedio todas sus aristas, las cuales son entonces las perpendiculares que determinan las condiciones mismas de la simetría.

Hay *prismas truncados simétricos* respecto de un plano que corta igualmente en ángulos rectos y por enmedio todas sus aristas.

El prisma triangular, fig. 1, tiene tres caras y ademas dos bases triangulares. Tantas cuantas variedades hay en la forma del triángulo otras tantas hay en la forma del prisma triangular.

Aplicacion á la óptica. Los físicos hacen uso de un prisma de vidrio ó cristal para descomponer la luz, cuyos diferentes radios se separan atravesando una cara del prisma para penetrar en este cuerpo y otra cara para salir. Entonces se ven en el orden siguiente los siete colores primitivos; el rojo, el naranjado, el amarillo, el verde, el azul, el añil y el violado. A esto es á lo que se llama el espectro solar.

Aplicacion á la arquitectura. El arquitecto emplea el prisma recto triangular de bases simétricas ABCDEF, fig. 7, para formar la *armadura de las aguas* de los edificios regulares. El *prisma truncado simétrico*, fig. 8, sirve para la armadura parparihilera. Esta figura es

tambien la que tienen los montones de piedras colocadas sobre el borde de los caminos para recargarlos. Como dicha figura es regular y fácil de medir se puede saber al instante la cantidad de piedras que hay en el monton. Por el mismo motivo se emplea tambien frecuentemente en las pilas de bombas y de balas que suele haber en los almacenes de artillería.

Aplicacion á la mecánica. En la construccion de las máquinas se hace con el prisma triangular de bases simétricas una guia fija sobre la cual resbalan los bastidores ó los carros de que se quiere que su movimiento sea rigurosamente rectilíneo.

El prisma cuadrangular, fig. 2, tiene cuatro caras y cada una de sus bases es un cuadrángulo como su nombre lo indica. Cuando este cuadrángulo es un paralelógramo el prisma toma el nombre de *paralelipipedo*. Llámase paralelipipedo rectángulo cuando todas sus caras estan en ángulos rectos. Si ademas la base es un cuadrado, se llama *paralelipipedo cuadrado*. Tal es la regla cuadrada que se emplea para rayar el papel. En fin, cuando todas las caras del paralelipipedo son cuadradas se llama *cubo*, tales son los dados de jugar.

Los prismas rectos cuadrangulares de bases simétricas tienen los planos de simetría paralelos á las aristas, y pasan respectivamente por el eje de simetría de cada base.

Cuando la base es un rectángulo el prisma tiene tres planos de simetría respectivamente paralelos á las seis caras tomadas dos á dos. Cuando la base es un rombo ó losange el prisma tiene tres planos de simetría: 1.° el plano igualmente distante de las dos bases; 2.° y 3.° el plano que pasa por las diagonales paralelas de las bases romboidales.

En el cubo hay *doce* planos de simetría; tres paralelos á las caras, seis que pasan por las diagonales de las caras, y tres por las del cubo.

En cada uno de estos prismas los planos de simetría pasan por un punto notable que es el centro del

prisma, y se cortan dos á dos en las líneas que son los *diámetros* ó los ejes del prisma. Este punto y estas líneas tienen propiedades importantes para la mecánica; propiedades que esplicaremos en el volumen segundo (de las máquinas).

Aplicaciones varias. El ensamblador, el carpintero, el herrero y una multitud de otros artesanos hacen frecuente uso de los prismas simétricos cuadrangulares. Las vigas y las carreras de nuestras casas, los entramados y casi todas las demas piezas de las armaduras son prismas de este género. En otro tiempo estos prismas eran cuadrados, pero desde que se calcula mejor la fuerza de las maderas se ha conocido la ventaja de emplear prismas delgados por el lado en que tienen pocos esfuerzos que aguantar, y anchos por el lado en que se ejercen los mayores esfuerzos.

Las pilastras y los pilares cuadrados son paralelipipedos rectángulos.

Prismas de los cristales. La naturaleza que nos presenta en sus cristalizaciones formas geométricas tan variadas como exactas nos ofrece frecuentemente prismas triangulares, cuadrangulares, exagonos, octagonos &c. El estudio de estas figuras de los cristales es una de las mas bellas aplicaciones de la geometría, y á la que debemos luces preciosas sobre las sustancias mismas de que estos cristales se componen.

En fin, dividiendo con cuidado los cristales por las caras de union de sus formas primitivas, se ha dado cuenta por la geometría de todas sus variedades, y se ha hecho ver la constancia de las formas de la naturaleza hasta en las mayores irregularidades en apariencia.

Indiquemos ahora los medios de cortar un prisma recto en un cuerpo de figura cualquiera.

* Se tendrá cerca del cuerpo que se ha de cortar en prisma un cordel paralelo, á la direccion que han de tomar las aristas, cuya direccion supondremos que sea horizontal para mayor facilidad. Póngase justo al cordel

uno de los lados de una escuadra que esté horizontalmente. Con un hilo á plomo que se hará caminar á lo largo del otro lado de la escuadra se señalarán sobre el cuerpo varios puntos que pertenecerán á la base del prisma que se desea construir. Hecho esto con la azuela, la sierra, ó cualquier otro instrumento se cortará el cuerpo segun el plano vertical que pase por los puntos señalados como queda dicho. En este plano se trazará el polígono que ha de formar la base. Desde cada vértice de este polígono se harán en el cuerpo escopleaduras cuyo fondo siga una direccion perpendicular á esta base; estas serán las aristas del prisma. De cada arista á la siguiente se alisará el cuerpo por los medios indicados en la leccion sesta. Para comprobar la operacion es necesario asegurarse: **1.°** De que las aristas son bien perpendiculares al plano de la base y por consecuencia á los lados de esta base que encuentran cada arista. Para mas seguridad se verá si todas las aristas conservan en toda su estension la misma distancia, lo cual es indispensable, y si dos á dos están exactamente en el mismo plano, lo que es fácil de notar á la simple vista, observando si una arista puede ocultar completamente al ojo todos los puntos de la que la sigue ó la precede inmediatamente. No queda ya otra cosa que hacer mas que el formar la segunda base que se traza con una escuadra, tirando sobre las caras del prisma líneas perpendiculares á las aristas, y de manera que la última venga exactamente al punto de donde se empezó á trazar la primera. Tal es el método que emplean los carpinteros de obras de afuera y los constructores de naves. *

* Luego que se ha cortado una cara del prisma y se quieren trabajar las caras contiguas se emplea la escuadra, ó la escuadra falsa ó *salta-regla*, para medir los ángulos que estas caras han de formar tanto entre sí como con la base. *

* De distancia en distancia se hace en la cara que se va á trabajar unas escopleaduras bastante profundas

para que una pierna de la escuadra entre en ella exactamente, quedando la otra pierna sentada sobre la parte ya trabajada, debiendo estar las dos piernas dirijidas perpendicularmente á la arista que separa la cara trabajada de la cara por trabajar. De esta suerte el fondo de la escopleadura estará exactamente situado en esta última cara. *

* Despues de haber marcado varias líneas de distancia en distancia no hay mas que quitar el material y alisar para tener concluida la nueva cara. *

En geometría se representan con líneas, que por su estension y su posicion no indican ninguna diferencia, las figuras en hueco ó en relieve que entran exactamente la una en la otra, pero en la práctica de las artes hay una enorme diferencia entre la fabricacion de las mismas figuras en hueco ó en relieve.

La fabricacion de los prismas nos ofrece un ejemplo. Acabamos de decir por qué medios se puede formar un prisma en relieve con el compás, la regla, la escuadra y los instrumentos cortantes. Supongamos ahora que se nos pide hacer un prisma hueco; por ejemplo un paralelipipedo rectángulo como son la mayor parte de los cajones que se emplean en los talleres y en los transportes.

* Para esto lo primero será dar á reducir las tablas al grueso conveniente. Estas tablas que han de estar bien escuadradas en todo su largo y su ancho serán prismas en relieve, y van á ser las caras del prisma hueco que se desea fabricar. Dos de estas tablas están cortadas del largo y ancho del cajon, otras dos del largo y alto, y finalmente dos de la altura y ancho de dicho cajon, colócanse en su lugar uniéndolas bien sea con clavos ó con cola. A veces se fija con bisagras uno de los lados que se cierra con cerraduras ó candado. Si las tablas están exactamente cortadas su union formará necesariamente un paralelipipedo. Hay que observar que las tablas de las caras por razon de su grueso se han de cortar á 45° *en bisel* como en

la fig. 3 en A*a*, B*b*....; ó bien como en la fig. 4.*

* Cuando un cajon es demasiado grande, de manera que el ancho de una tabla no es suficiente para formar una de sus caras, se ponen varias tablas unas junto á otras. Si no se quiere mas que un trabajo grosero se ponen simplemente unos travesaños clavados en todas las tablas de una misma cara del cajon. Tales son los cajones ordinarios que se hacen para transportar géneros en los carruages. *

* Si se quiere una obra mas curiosa se juntan las tablas cortando: **1.°** sobre la superficie de la una BDQP, fig. 5, una lengueta en relieve; 2.° sobre la superficie de la tabla contigua BDMN una ranura de la misma forma á fin de que la *lengueta* encage exactamente en la ranura. *

* La *lengueta*, fig. 5, no es otra cosa mas que un prisma rectangular en relieve, y la *ranura* un prisma rectangular en hueco. Puédese trabajar la una y la otra con el cepillo como lo esplicaremos mas adelante. *

* *La espiga y la mortaja*, fig. 6, son tambien dos prismas rectangulares el uno en relieve y el otro en hueco, que semejantes en esto á las ranuras y á las lenguetas, están cortados de manera que se acoplan con exactitud. Empléanse cuando se quiere unir á escuadra dos prismas. La espiga puede hacerse con la sierra; la mortaja no puede hacerse sino con el escoplo, y pide mucho mas tiempo. Esto es todavia un ejemplo de la dificultad diferente que el obrero encuentra en hacer un mismo prisma en *hueco ó en relieve*. *

La carpintería ademas de las formas que acabamos de citar ofrece muchas aplicaciones ingeniosas y sencillas de figuras terminadas por planos: los unos en hueco y los otros en relieve que encajan unos en otros con exactitud.

Muchas veces los carpinteros tienen que construir ó mas bien que figurar prismas con piezas de madera que componen las aristas de ellos como en la construccion de las armaduras. Por ejemplo, la fig. 7 representa una

armadura que tiene la forma de un prisma triangular situado sobre un prisma cuadrangular ó una casa rectángula de madera. Para construir esta casa el carpintero tiene que resolver muchas cuestiones de geometría que son fáciles en virtud de los principios que se dan en estas lecciones.

Tiene que medir y labrar cada pieza de carpintería con su largo y figura que debe tener, con sus ángulos bien medidos y transportados sobre la madera para cortarla segun convenga, &c.

Es pues de grande importancia para el carpintero de obras de afuera que conozca todos los principios de geometría que llevamos espuestos, á fin de que pueda hacer de ellos una aplicacion juiciosa sin que le detengan los casos imprevistos, los cuales no dejan otro recurso á la ignorancia que el de obrar á la ventura, á tientas y casi siempre mal.

La geometría es mas importante todavia para el carpintero de ribera; porque éste debe producir formas mas sabias y mas complicadas cuya escelencia depende de una ejecucion rigurosa.

Otra figura mas sencilla en apariencia que el prisma, porque tiene menos caras pero mas complicada en realidad, porque estas caras no son paralelas, es la *pirámide.*

La pirámide, fig. 9, **10**, **11**, 12, 20, se compone de caras planas triangulares que tienen todos sus vértices en un mismo punto y forman con sus bases un polígono plano, es decir la *base* de la pirámide, así como el vértice comun de las caras triangulares es el vértice de la pirámide.

La pirámide simétrica tiene por base un polígono simétrico, y su vértice está situado en el plano de simetría.

La pirámide regular tiene por base un polígono regular. Ademas es necesario que el vértice de la pirámide y el centro de la base esten en una misma línea recta que sea perpendicular al plano de esta base. Si se supone que la base sea horizontal, el vértice de la pirámide estará al *plomo* del centro de la base. El hilo de á plomo situado de este modo representará el eje de la pirámide regular.

La pirámide triangular OABC, fig. 12, tiene por base un triángulo ABC. La pirámide cuadrangular ABCDE, fig. **11**, tiene por base un cuadrilátero BCDE, &c.

Las armaduras de las torres ó companarios triangulares ó cuadrados son pirámides que tienen por base el triángulo ó el cuadrado formado por la cornisa del campanario ó de la torre, fig. 9 y **10**.

Los *obeliscos* son pirámides regulares que se emplean como monumentos públicos, y por lo comun son cuadrangulares. Propóngamonos cortar en la cantera un obelisco semejante, suponiendo que está tendido ó que su eje está horizontal y su base vertical.

* Se cortará en la roca ó en el granito un plano vertical en el que se trazará el cuadrado BCDE, fig. **11**, que ha de ser la base del obelisco. Despues se empezará el corte de la cara superior ACD y de las caras contiguas ACB, ADE, observando con la mayor exactitud: **1.°** que los ángulos formados por las caras ACD, ACB, ADE con el plano de la base sean perfectamente iguales á los del obelisco que se ha proyectado. Se comprobará esta operacion viendo si el vértice A está en una recta AO perpendicular al plano de la base, que pasa por el centro O de esta base. A este efecto se verá si en dos direcciones diferentes tomando OM en el plano de la base, y luego AN paralela é igual á OM, la recta NM que debe ser paralela á AO está á escuadra con AN y OM. Entonces el eje OA será perpendicular á dos rectas tiradas por el punto O en el plano de la base. Este eje será por consecuencia perpendicular á este plano. Hechas todas las comprobaciones, y rectificados los errores que se noten, no quedará mas que trabajar la cara inferior ABE, cuyo plano está determinado por las aristas AB y AE. *

Propongámonos ahora cortar una pirámide triangular de forma cualquiera en un trozo de piedra ó de

madera, suponiendo que se conozca la figura de la base y los ángulos formados por el plano de esta base con las otras tres caras.

* Se traza y se corta la cara plana, valiéndose de los medios dados en la leccion VI; despues por medio de la escuadra falsa cuyas dos piernas estan dirigidas perpendicularmente á los lados de la base se trazan tres caras planas ABC, BCO, ACO, fig. 12, formando los ángulos dados con esta base. Estas son las tres caras de la pirámide *

* A veces la posicion sola del vértice es dada por el punto *m*, fig. 12, en que la perpendicular O*m* toca á la base, y por la altura O*m*. En tal caso, luego que se ha trazado la base se pone ésta á nivel; despues se miden con un hilo á plomo dos alturas NP, QR iguales á O*m*, tomando los puntos QN al nivel del plano de la base, y se tiran OR igual á *m*Q, OP=*m*N, y el punto O en que las dos horizontales OR, OP se encuentran es el vértice de la pirámide. Conocido ya y señalado el vértice se desbastará desde luego el trazo de madera ó de piedra haciendo surcos ó escopleaduras en línea recta, segun OA, OB, OC; despues se alisará la materia entre estas rectas. *

En ciertos casos seria mucho mas sencillo el empezar haciendo un pequeño trazado geométrico y midiendo los ángulos de las tres caras sobre la base, construyendo despues estas caras sin hacer caso de la posicion del vértice.

* Bastaria por ejemplo, fig. 13, con que del pie M de la perpendicular O*m* bajada del vértice á la base se tirase *mn*, *mp*, *mq*, respectivamente perpendiculares á AB, BC, CA; despues se construirán á parte los triángulos rectángulos O*mn*, O*mp*, O*mq*; y los ángulos O*nm*, O*pm*, O*qm* serán los de las tres caras de la pirámide con la base. *

Los elementos necesarios para trazar un ángulo dan á conocer las condiciones necesarias para que dos triángulos sean iguales. Lo mismo sucede con respecto á las

pirámides. Dos pirámides triangulares son iguales: 1.° cuando tres caras de la una son iguales á tres caras de la otra; 2.° cuando dos caras y el ángulo plano comprendido entre ellas son iguales de una parte y otra; 3.° cuando una cara, y los tres ángulos planos á los cuales pertenece esta cara son iguales de una parte y otra; 4.° cuando las seis aristas son iguales de una parte y otra &c.

El estudio, el trazado y el cálculo de las pirámides son de grande importancia en las operaciones topográficas, en que los puntos, cuya posicion se trata de determinar, no están en un mismo plano.

En este caso se refiere la posicion de cada punto que se observa á la de otros tres que forman un triángulo tomado por base. Con los instrumentos, como son el grafómetro, el círculo repetidor y el teodolito, se mide el ángulo que forma el radio visual tirado de cada vértice del triángulo tomando por base el objeto observado, sea con un lado de la base, sea con el plano de la base. Los tres radios visuales reunidos á los tres lados de la base forman una pirámide cuyo vértice es el punto observado. Estas operaciones complicadas pertenecen á ciertas profesiones, como las de los ingenieros hidrográficos ó geográficos, agrimensores y encargados de operaciones estensas como las del catastro.

Cuando un cuerpo está de todos lados terminado por caras planas éstas lo están por líneas rectas que forman polígonos planos; y sabemos que éstos pueden descomponerse en triángulos.

Si pues tomamos un punto O, en lo interior del cuerpo ABC...., fig. 21, podemos á nuestro arbitrio considerarle: 1.° como el vértice de tantos pirámides poligonales cuantos son los polígonos que tiene por caras el cuerpo: 2.° como el vértice de tantas pirámides triangulares como triángulos puedan trazarse en estas caras. En los dos casos la reunion de todas estas pirámides representará completamente el cuerpo.

Medidas de los sólidos terminados por caras planas. Se ha tomado el cuadrado para medir las superficies;

y para medir los volúmenes se toma el *cubo* que es un sólido terminado por todos lados por cuadrados.

Cubicar un cuerpo es determinar cuántas veces contiene á un cubo tomado por *unidad*. Veamos lo primero como se mide el volúmen de un cubo mayor con uno menor.

Supongamos, por ejemplo, que el lado del cubo mayor C, fig. 14, contiene diez veces el lado del cubo menor C. Cortemos el cubo mayor en diez rebanadas paralelas á una de sus caras, y todas de igual grueso. Este grueso será el del cubo menor. Las bases de estas rebanadas contienen diez veces diez una de las caras del cubo menor, y así cada rebanada contendrá diez veces diez cubos menores. Luego las diez rebanadas contendrán en suma diez veces diez veces diez cubos menores: multiplicacion que se indica así, 10^3. Continuando el mismo raciocinio y calculando que dos veces dos veces dos hacen ocho, tres veces tres veces tres hacen veinte y siete, &c. se verá que si los lados del cubo mayor contienen el lado del menor....

1. veces; habrá	1.	cubos menores.
2.	8.	en el mayor.
3.	27.	
4.	64.	
5.	125.	
6.	216.	
7.	345.	
8.	512.	
9.	729.	
10.	1000.	

Para hablar abreviadamente se dice que 8 *es el cubo* de 2, 27 *el cubo* de 3, 64 *el cubo* de 4, &c. Esto quiere decir cual es el número de cubos menores contenidos en un cubo mayor cuyo lado es igual á 2, 3, 4.... veces el lado del cubo menor.

El volúmen de un prisma cuadrangular es igual al producto de su base por su altura.

* 1.° Supongamos el prisma rectángulo, fig. 15. Cortémosle paralelamente á su base en tantas rebanadas como veces contiene su altura la unidad de medida, esto es, el lado del cubo menor tomado por esta unidad. Tantas cuantas veces la base de la rebanada contiene la base de este cubo, otros tantos cubos menores habrá en la rebanada. Luego el número total de cubos menores es igual al número que indican la superficie de la base multiplicada por el número que indica la altura. A esto es á lo que se llama el producto de la base por la altura. *

Dos prismas que tienen la misma base rectángula, y la misma altura, pero el uno recto AG, fig. 16, y el otro oblicuo Ag tienen el mismo volúmen.

* Para probarlo observo que los dos prismas triangulares ABEF*ef*, DCHG*hg* son iguales. En efecto tienen una misma altura AE = DH; y sus bases AE*e*, DH*h* son dos triángulos iguales, puesto que AE = DH, y que los otros dos lados son respectivamente paralelos. Pero si yo añado al paralelipipedo ABCDEFGH el prisma triangular DCHG*hg*, y resto su igual ABEF*ef*, tengo el prisma cuadrangular ablícuo ABCD*efgh*. Luego este último tiene el mismo volúmen que el prisma rectángulo de la misma base y la misma altura. *

* Se haria ver con facilidad que los prismas ABCDEFGH, *abcdefgh*, fig. 15, tienen el mismo volúmen que cualquier otro que tenga la misma altura cuyas bases fuesen paralelógramos de la misma superficie que la base rectángula ABCD. *

El volúmen de un prisma recto triangular es igual al producto de su base por su altura.

* En efecto, todo prisma cuadrangular ABCDEFGH, fig. 17, se puede dividir en dos prismas triangulares de un mismo volúmen, y esta igualdad se conserva, cualquiera inclinacion que se dé á las aristas del paralelipipedo, sin mudar su base ni su altura. Pero la superficie de la base ABC ó ADC, de los prismas triangulares es la mitad de la superficie de ABCD base del paralelipipedo. Luego el volúmen del prisma triangu-

lar es igual al producto de su base por su altura.*

El prisma poligonal cualquiera ABCD, *abcd*, *fig.* 18, *tiene por volúmen el producto de su base por su altura.*

* En efecto este prisma puede descomponerse en tantos prismas triangulares como triángulos ABC, ACD.... puede contener su base ABCD; y teniendo todos ellos la misma altura que el prisma total, su volúmen total será la suma de las bases triangulares ABC, ACD, ADE.... multiplicada por la altura. *

Cubicacion de las pirámides. Empezemos por la pirámide triangular.

El volúmen de una pirámide triangular es la tercera parte del producto de su base por su altura.

* Para demostrarlo tomemos un prisma triangular cualquiera AF, fig. 19, cortémosle por un plano ACE que pase por el lado AC de la base y por el ángulo E, y desde luego tendremos una pirámide triangular que tendrá la misma base y la misma altura que el prisma.*

* Nos queda una pirámide cuadrangular en la que ACFD es la base y E el vértice. Dividámosla en dos pirámides triangulares por un plano AEF, y tendremos la pirámide ADF, en la cual DEF es la base y A el vértice; pirámide que por consecuencia tiene la misma base y la misma altura que el prisma dado. Por último si comparamos la tercera pirámide ACFE á ADEF veremos que es igual á ella en volúmen; porque tomando los triángulos ADF=ACF por sus bases, resultará que tendrán el mismo vértice E. Luego por fin, se puede considerar el volumen de todo prisma triangular como equivalente al de tres pirámides de una misma base y altura; luego el producto de la base de cada pirámide por su altura, que es el volúmen del prisma, es igual á tres veces el volúmen de esta pirámide. *

El volúmen de una pirámide cualquiera, fig. 20, *es la tercera parte del producto de la base por la altura.*

* Para demostrarlo dividamos la base en triángulos

ABC, ACD, ADE.... de manera que cada uno sea la base de una pirámide triangular que tenga O por vértice. Cada una de estas pirámides triangulares tendrá por medida la superficie de los triángulos ABC, ACD.... multiplicada por el tercio de la altura comun. Por consecuencia la pirámide total tendrá por medida el producto de la base total por la tercera parte de esta altura. *

Cubicacion de un cuerpo terminado por tantas caras planas como se quiera, fig. 21. Tómese en este cuerpo un punto cualquiera O por vértice de las pirámides que tengan por base las caras planas del cuerpo. La superficie de cada cara multiplicada por el tercio de su distancia al vértice O será el volúmen de la pirámide correspondiente, y la suma de dos productos será el volúmen del cuerpo. Para que fuese fácil poner este método en práctica seria necesario poderse colocar en lo interior del cuerpo de caras planas y medir directamente la distancia de cada cara á este plano; pues de lo contrario tendríamos que hacer operaciones de geometría sumamente complicadas, que no pueden convenir ni á la rapidéz ni á la sencillez de las operaciones de la industria; pero por fortuna hay un método que es tan fácil como espedito.

* Antes de esponer este método tratemos de valuar el volúmen del tronco del prisma triangular ABCDEF, fig. 22. Podemos descomponerle en tres pirámides: la primera que tenga ABC por base y BE por altura; es consiguiente que su volúmen será la base ABC, multiplicada por el tercio de BE. La segunda pirámide que tiene ACF por base y su vértice en E, es equivalente á la pirámide que tiene en B su vértice y ACF por base, ó lo que es lo mismo que tiene ABC por base y su vértice en F. La tercera pirámide ADFE es equivalente á la pirámide ADFB la cual es equivalente á ABCF. Luego *el tronco del prisma* ABCDEF *es equivalente en volúmen á tres pirámides que tienen* ABC *por base comun y sus vértices respectivos en* D, E, F, *al estremo de las tres aristas.* *

* Si las tres aristas son perpendiculares á la base el volúmen de las tres pirámides, y por consecuencia del tronco del prisma será superficie ABC$\times\frac{1}{3}$ (AD mas BE mas CF) *

* Supongamos que se pide el volúmen de un tronco de prisma MNODEF, fig. 23, comprendido entre dos planos MNO, DEF oblícuas á las aristas del prisma. Para hallarle, suponiendo que ABC sea perpendicular á estas aristas, se tendrá:

Volúmen ABCDEF = *superf.* ABC $\times\frac{1}{3}$ (AD+BE+CF).

Volúmen ABCMNO = *superf.* ABC$\times\frac{1}{3}$ (AM+BN+CO).

Luego por último:

Volúmen MNODEF = *superf.* ABC $\times\frac{1}{3}$ (DM+EN+OF). *

Con estos principios se determinará fácilmente el volúmen de un cuerpo cualquiera terminado por caras planas; pues no habrá mas que descomponer este cuerpo en prismas y troncos de prismas triangulares, de los que se hallará inmediatamente el volúmen. La suma de todos estos volúmenes será la del cuerpo.

Puede demostrarse con la misma facilidad que *todo prisma ó tronco de prisma cuadrangular* ABCDEFGH, *fig.* 24, *que tenga sus aristas perpendiculares á la base* ABCD, *tiene por volúmen la superficie de esta base multiplicada por la cuarta parte de la suma de las cuatro aristas* AE, BF, CG, DH.

* Para esto descompongamos sucesivamente el prisma cuadrangular en dos prismas triangulares ABCEFG, ADCEHG, despues ABDEFH, BCDFGH. *

* Tendremos el volúmen de los dos primeros prismas = $\frac{1}{2}$ *superf.* ABCD$\times\frac{1}{3}$ (AE+BF+CG+AE+DH+CG) y que el volúmen de los dos segundos prismas = $\frac{1}{2}$ *superf.* ABCD$\times\frac{1}{3}$ (AE+BF+DH+BF+CG+BH). *

* Tomando la suma de estos dos productos se tiene dos veces el volúmen del prisma cuadrangular.

$\frac{1}{2}$ *superf.* ABCD$\times\frac{1}{3}$ (3 AE+3BE+3 CG+3DH).

Luego el volúmen del prisma cuadrangular es

$\frac{1}{4}$ *superf.* ABCD (AE+BF+CG+DH). *

Aplicacion á la cubicacion de la carena de las naves. Hemos visto en la leccion segunda que la carena se divide en secciones horizontales por los planos horizontales de las líneas de agua que están á igual distancia. Se divide tambien en cortes verticales por otros planos igualmente distantes llamados planos de los *pares.* Estos planos cortan el volúmen de la carena en prismas rectángulos de igual base, truncados de cada borde. Mídese el volúmen total de estos troncos de prismas multiplicando su base comun por la cuarta parte de las cuatro aristas de cada prisma. Pero cada arista sirve á cuatro prismas (1). Luego el volúmen total de la carena del navío es igual á la superficie de uno de los rectángulos, esto es, el producto de la distancia de los planos de línea de agua por la distancia de los planos de cuaderna y por la simple suma de todas las aristas, las cuales son horizontales situadas á la vez en cada plano de cuaderna y en cada línea de agua. Esta operacion aproximada tan sencilla como fácil puede servir para calcular el volúmen de cualquiera otro cuerpo.

Dos cuerpos simétricos son iguales en volúmen.

* En efecto si descomponemos estos cuerpos en troncos de prismas triangulares que tengan por aristas las líneas paralelas que determinan la simetría, por cada tronco de prisma MNODEF, fig. 23, situado de un lado del plano de simetría ABC, tendremos del otro

---

(1) *Esceptuando las aristas de los bordes que no sirven mas que á dos prismas; por cuya razon no debe tomarse cada uno mas que $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ vez. Puede haber cuatro aristas que no sirvan mas que á un prisma, y de ellas solo se debe tomar el cuarto para añadirlo á la suma de todas las aristas que sirven á cuatro prismas.*

lado un tronco de prisma *mnodef* tal que DM$=dm$, EN$=en$, FO$=fo$; y los dos troncos serán iguales en volúmen. Luego la suma de todos los troncos de prismas en el primer cuerpo, es igual á la suma de todos los troncos de prismas correspondientes en el segundo cuerpo. Así *cuando dos cuerpos* de caras planas son simétricos, sus volúmenes son siempre iguales. Esta propiedad que es verdadera, cualquiera que sea el número de las caras, lo seria tambien aun cuando hubiese un gran número de caras tan pequeñas que se pudiesen considerar los cuerpos como terminados por superficies curvas.

Por consecuencia todo plano de simetría de un cuerpo corta á éste en dos partes de igual volúmen.

De los sólidos semejantes. Dos pirámides ABCD, *abcd*, fig. 25, son semejantes cuando todas sus aristas correspondientes AB y *ab*, BC y *bc*, CD y *cd*, AD y *ad* son paralelas.

* Es evidente en efecto que entonces los triángulos formados por sus caras correspondientes tienen sus lados paralelos, y por tanto son semejantes. Luego los tres ángulos planos que forman cada vértice de las dos pirámides son respectivamente iguales. Ademas siendo paralelas las tres aristas que forman cada ángulo sólido, si se transporta ABCD paralelamente á sí misma de manera que el punto *a* venga á situarse en A, *ab* se aplicará sobre AB, *ac* sobre AC, *ad* sobre AD; luego los planos *abc* y ABC, *abd* y ABD, *acd* y ACD se confundirán; luego tambien los dos ángulos sólidos A y *a* de las dos pirámides serán iguales. Demostraríase del mismo modo que los ángulos sólidos B y *b*, C y *c*, D y *d* son iguales: todas las condiciones para que las dos figuras sean semejantes estan pues satisfechas por la sola condicion de que las dos pirámides tienen sus lados correspondientes paralelos. *

Tambien son semejantes dos pirámides aun cuando no tengan sus lados paralelos si tienen sus aristas proporcionales.

* En efecto, siendo proporcionales los tres lados de cada una de sus caras correspondientes, estas caras serán semejantes, los ángulos planos serán iguales, y por consecuencia tambien los ángulos sólidos que forman tres á tres. Quedan pues satisfechas todas las condiciones de la proporcionalidad. *

Dos sólidos terminados por caras planas son *semejantes*, cuando sus aristas correspondientes son proporcionales y sus ángulos correspondientes planos ó sólidos, iguales entre sí.

* En efecto, siempre se pueden descomponer estos sólidos en pirámides cuyos lados sean proporcionales, y por consecuencia los ángulos correspondientes iguales. *

Los volúmenes de las pirámides semejantes ABCDE... abcde..., *fig.* 26, *son proporcionales á los cubos de las aristas correspondientes.*

* En efecto, el volúmen de cada pirámide es igual al producto de su base por el tercio de su altura; pero como las bases BCDEF, *bcdef*...., son figuras semejantes, serán proporcionales al cuadrado construido sobre uno de sus lados; luego se tendrá, fig. 26: *

Superficies.... BCDEF : *bcdef* :: BCMN : *bcmn*.

Ahora en BCMN y *bcmn*, como bases, construyamos un cubo y tendremos por volúmenes de los dos cubos:

$$BC^3 = BC\tfrac{1}{2} \times BC,\quad bc^3 = bc^2 \times bc.$$

Pero $BC : bc :: \frac{1}{3} AH : \frac{1}{3} ah$;

Luego $BC^3 : bc^3 :: BC_2 \times \frac{1}{3} AH : bc^2 \times \frac{1}{3} ah$:

* En la última proporcion los dos términos últimos representan el volúmen de las dos pirámides, y los dos términos primeros representan el volúmen de los dos cubos. *

Los volúmenes de sólidos semejantes terminados por cualquier número de caras planas son como los cubos de las líneas correspondientes.

* En efecto, podemos descomponerlos en un mismo número de pirámides semejantes que tengan todas la misma razon *r*, que sea la de sus lados correspondientes. Pero dos pirámides cuyos lados correspondientes son entre sí

como 1 es á r, tienen volúmenes que son entre sí como 1 es al cubo de r. Luego añadiendo por una parte todas las pirámides menores y por otra todas las pirámides r^3 veces mas voluminosas, los volúmenes serán entre sí : : 1 : r^3.

Esta leccion se ha de esplicar poniendo á la vista de los alumnos prismas y pirámides en relieve iguales, semejantes, simétricas, &c. Lo mismo es menester hacer cuando se espliquen las lecciones siguientes, poniéndoles á la vista los cilindros, los conos, las esferas, &c. en relieve con las secciones bien ejecutadas, &c.

LECCION OCTAVA.

De los cilindros.

Cuando una línea recta está sujeta á moverse á lo largo de una curva ABCD...., fig. 29, permaneciendo paralela á una direccion dada, *engendra* un cilindro. Esta es la razon de llamarla *generatriz* del cilindro. Cada una de las rectas A*a*, B*b*, C*c*, que representa una posicion de la generatriz, es una arista del cilindro.

Por aquí se vé, 1.° que hay tantas especies diferentes de cilindros como especies de curvas ABCD...., que pueden servir para dirigir el movimiento de la recta generatriz: 2.° que con una misma curva ABCD, fig. 1 y 2, se pueden formar una infinidad de cilindros diferentes segun las inclinaciones diversas que se den á la recta generatriz A*a*, B*b*....

Como á los ojos del geómetra una recta completa se prolonga al infinito por los dos estremos, un cilindro para ser completo debe prolongarse al infinito por los dos estremos de sus aristas.

Pero en la industria los cilindros tienen siempre un fin por ambos lados de sus aristas; así para un artista todo cilindro tiene dos estremos.

Cuando en un estremo el cilindro se termina por una superficie plana ABCD se llama *base* esta superficie. Si el cilindro está terminado en los dos estremos por superficies planas y paralelas, se dice que tiene *dos bases*. Es *recto*, fig. 1, *ú oblícuo*, fig. 28, segun que sus aristas son perpendiculares ú oblícuas á los planos de las *bases*.

Algunas veces uno de los planos que terminan el cilindro no es paralelo al otro como en la fig. 34, en

la que se ve un cilindro terminado por superficies planas ABCD, MNPQ. Supónese entonces que el plano MNPQ ha truncado el cilindro de bases paralelas ABCD, *abcd* y se llama *tronco del cilindro*, ó *cilindro truncado* la parte ABCDMNPQ, lo mismo que la *abcd*MNPQ.

El cilindro cuya base es un círculo se llama *cilindro circular*. Los artistas le llaman simplemente *cilindro;* porque tiene un uso por decirlo así esclusivo en la mayor parte de los ramos de la industria.

La línea recta O*o*, fig. 30, tirada por el centro de los círculos que sirven de bases al cilindro circular es el *eje* de este cilindro. Dicha línea pasa por el centro de todos los círculos que pueden formarse cortando el cilindro por planos paralelos al plano de las dos bases.

En virtud de las propiedades de las paralelas (que hemos demostrado en la leccion II) la superficie del cilindro es exactamente la misma cuando procede, **1.°** del movimiento de una recta que tome sucesivamente las posiciones paralelas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*...., en toda la ABCD...., fig. 29; 2.° del movimiento de la curva ABCD...., fig. 30, que tome sucesivamente las posiciones paralelas ABCD, A′B′C′D′, A″B″C″D″, siguiendo una línea recta; de manera que el mismo punto de la curva, como por ejemplo A ocupe sucesivamente las posiciones A′A″A‴ de una arista A*a*.

Las artes se han aprovechado de estos dos medios de engendrar el celindro recto y circular. Segun es la necesidad que tienen de dar á esta superficie una gran continuidad en un sentido mas bien que en otro, prefieren el primer modo al segundo, ó el segundo al primero.

I. *Ejecucion del cilindro por aristas.* Cuando importa dar al cilindro una continuidad perfecta en el sentido de sus aristas se inscribe en un círculo ó se *circunscribe* al círculo un polígono regular de un gran número de lados ABCDE; despues se ejecutan con precision tantas facetas planas ó paralelógramos AB*ba*, BC*cb* &c., fig. 29, como lados tenga la base. Tras

esto con un cepillo, una azuela, una sierra, ó cualquiera otro instrumento para cortar superficies planas siguiendo la direccion longitudinal de las rectas paralelas A*a*, B*b*, C*c*...., se quitan estas aristas salientes y se redondea el cilindro. Por este medio hay seguridad de que la superficie satisface la condicion de estar formada de aristas rectilíneas y paralelas. Pero no hay igual seguridad de que la superficie que representan tenga en toda su estension un círculo por contorno, porque el cepillo, la azuela, &c. dan la continuidad en el sentido rectilíneo de las aristas y no en el sentido del contorno circular.

Aplicacion para labrar los mástiles de navío. Estos mástiles y sobre todo los mástiles superiores (los masteleros y los de juanete) han de tener su superficie muy contínua en el sentido de la longitud, á fin que las argollas de las vergas (llamadas argollas de racamento) corran sin resistencia de abajo arriba y de arriba abajo alrededor de estos mástiles: así el obrero ejecuta dichos mástiles segun el método que acabamos de esplicar.

II. *Ejecucion del cilindro por curvas iguales y paralelas.* Cuando se trata principalmente de que haya continuidad en el sentido perpendicular á la longitud de las aristas, se hace uso de las herramientas del tornero. Con estas herramientas se describen sucesivamente gran número de círculos ABC, A′B′C′, A″B″C″...., fig. 30, para que su reunion represente un cilindro. Entonces hay seguridad de que la superficie ejecutada es perfectamente circular y continua en sentido transversal; pero en general no tendremos la misma certeza de la continuidad en el sentido longitudinal.

Aplicacion para labrar las maderas para lanzas, picas, lanadas, &c. Yo he visto en los arsenales de Inglaterra emplear el medio siguiente para tornear las superficies cilíndricas; se toma un madero cuya figura es un prisma, labrado ya á cuatro ú ocho caras. Métenlo en el cepo de un cepillo circular y lo va re-

dondeando el hierro del cepillo á medida que camina. Por este medio forman una superficie cilíndrica exactamente circular, con tal que el prisma sea bien recto; pero si el hilo de la madera está mas ó menos torcido hácia alguna parte así sale tambien ladeado.

Cuando se quiere ejecutar una superficie que sea rigurosamente cilíndrica es necesario asegurarse de la continuidad *en los dos sentidos*; lo que se hace por ejemplo llevando la herramienta cortante del tornero por medio de una guia paralela al eje del cilindro, de manera que el corte quede siempre á la misma distancia de este eje. Entonces estaremos ciertos de que todos los círculos son iguales entre sí, y de que las aristas son exactamente rectilíneas.

Aplicacion á las regillas, enrejados, redes, &c. Los dos medios de ejecutar un cilindro se reunen para formar superficies cilíndricas caladas como son las de los enrejados y regillas. Hácense con hilos ó barras de hierro; con listones de madera, ó con cuerdas tendidas en líneas rectas para representar las aristas. Unos aros de la misma materia todos de igual tamaño y de igual curvatura representan las curvas iguales y paralelas á las bases del cilindro. Luego hay que soldar ó atar con hilos metálicos, ú otros, las aristas y las curvas á cada punto donde se cruzan. De esta manera es como se da la figura cilíndrica á los tornos, á las columnas de enrejado, á las jaulas, á los cestos, &c.

Se pueden formar cilindros de cierto grueso, juntando muchos cilindros menores y atándolos esteriormente con aros ó correas circulares. Tales son las faginas que se hacen para las obras militares. Tales son tambien los haces ó manojos de picas que se forman para ornato ó utilidad, &c.

Hay artes cuyo objeto principal es fabricar superficies cilíndricas doblando las superficies planas contínuas. (*Véase la leccion X*).

El celeminero, toma tablas bien planas y de igual grueso para doblarlas segun la forma y dimensiones

que han de tener las medidas que va á hacer, como la hectolitra, la decalitra, la litra, &c. Llamaban *celemin* á la medida antigua cilíndrica con que se median los granos; y el artesano que fabricaba los celemines se llamaba *celeminero* (1).

Para cerciorarse de la forma cilíndrica de las medidas, les da este artesano un suelo plano y sólido, al modo del que tienen las barricas. Suelen echar al borde superior ó boca de las medidas un aro de hierro, y uno ó dos diámetros de hierro; lo cual impide que la medida tome una figura irregular y mude de capacidad.

El *calderero y el hojalatero* que trabajan con hojas delgadas de cobre, de hierro ú hoja de lata, fabrican á veces superficies cilíndricas. Tales son los cañones para las chimeneas, los canalones de los tejados &c. Por lo regular se da á estos artesanos el diámetro y el largo que ha de tener cada cañon, y ellos sacan la circunferencia que tendrá, la cual multiplicada por el largo les da la superficie de las hojas de cobre, hierro ú hoja de lata que necesitan.

Ha de tenerse cuidado de añadir: 1.° á la circunferencia del cañon cierto ancho mas, por lo que han de solapar las dos partes de la hoja que han de ponerse en contacto, para formar el cilindro; 2.° á cada cañon algo mas de largo por lo que ha de entrar uno en otro.

Las *calderas de las máquinas de vapor* son unas de las obras mayores que el calderero ejecuta en forma de cilindro; pero estas calderas no son de base circular (véase fig. 31). Para unir las hojas de hierro ó de cobre de que se compone una de estas calderas grandes

---

(1) *Ya se entiende que aquí se ha traducido lo que el autor dice, pero no tiene exacta significacion en nuestra lengua. Por* celeminero *se entiende el que construye las medidas de granos ó de áridos.*

hay que emplear clavos cilíndricos ó de remache que atraviesen las hojas tan ajustados que no pueda salir el vapor por la juntura de ellos con las hojas. Lógrase esto con un grupo de cuatro ó cinco punzones que estan á igual distancia entre sí y forman una matriz única. Esta matriz se puede levantar y bajar con un aparato mecánico de mucha fuerza. La hoja de hierro en que se han de abrir los agujeros por donde han de pasar los clavos cilíndricos, está puesta sobre una corredera. La corredera está quieta cuando la matriz baja, y los punzones atraviesan la hoja de hierro á la distancia que se requiere. Hecho esto y abiertos estos agujeros, sube la matriz, y la hoja anda lo suficiente para que al volver á bajar los punzones abran los cuatro ó cinco agujeros siguientes á la distancia que han de tener de los primeros.

Tal es el medio que se emplea para preparar la union exacta, no solo de las hojas metálicas con que se hacen las calderas grandes de las máquinas de vapor, sino tambien para fabricar la cubierta esterior de los navíos de hierro, los cajones para agua introducidos recientemente en la marina, &c.

Notemos acerca de estos cajones para agua, cuya forma es de cubos ó de prismas rectángulos truncados, que las aristas de estos cubos ó prismas estan romas, y su figura es la de porciones de hojas de hierro en forma de cuarto de cilindro recto circular.

El *plomero* y el *fabricante de órganos* dan tambien á sus caños la forma de cilindros. Para fabricarlos se puede doblarlos, como lo hacen los caldereros y hojalateros, ó tirarlos por hilera.

Fabricacion de los cilindros por estira. Voy á describir un medio practicado en el arsenal de Chatham para hacer cilindros de plomo huecos que tengan cierto grueso y cierto diámetro.

* Sea ABCD, fig. 32, un cilindro macizo cuyo diámetro sea igual al diámetro interior del cilindro hueco que se quiere fabricar. Lo primero que se hace es fundir

alrededor del cilindro macizo ó de un molde del mismo diámetro, un cilindro de plomo mas grueso y mas corto que el que se quiere fabricar. Se introduce el cilindro macizo ABCD en el cilindro hueco: despues se pasa todo á una hilera circular que se va estrechando cada vez mas. Por el efecto de la hilera se adelgaza y alarga el cilindro hueco conservando por diámetro interior el de ABCD, y por este medio se llega á dejarle del grueso que convenga. Este medio da cilindros de una continuidad segura en ambos sentidos, siempre que el cilindro sólido ABCD está ejecutado con perfeccion. *

Los hilos metálicos de cualquier grueso, y tambien las barras de hierro redondo, son cilindros que se fabrican reduciéndolos á cierto diámetro por medio de la estira. Pásanlos por unos agujeros circulares á que llaman *hileras*. Estos agujeros circulares son de varios tamaños de mayor á menor, para ir reduciendo el grueso de la barra ó del hilo, sucesivamente cada vez que se pasa por ellos.

Fabricacion de los cilindros por fundicion y moldes. Tales son los caños de hierro colado que usan en las ciudades para la conducion de las aguas y del gas. Tales son los tubos que se emplean en el cuerpo de las bombas de agua, de aire, vapor, &c.

Fabricacion de los cilindros por el taladrado. El moldeo basta para ciertos tubos ó caños, como son los que sirven para la conducion de las aguas, en que no hay necesidad de que la forma tenga suma exactitud; pero cuando los tubos ó caños hayan de tener una exactitud matemática, como son los cuerpos de bomba, y el alma de los cañones, obuses y morteros, suele ser preciso echar mano de otros medios mas rigurosos; tal es la operacion del *taladrado* (véase la leccion XII) sobre *las superficies de revolucion*.

Fabricacion de los cilindros por el aserrado. Por último se pueden hacer los cilindros con la sierra: 1.° teniendo fijo el cuerpo que se va á aserrar y haciendo caminar la sierra paralelamente á una direccion dada,

y siguiendo un contorno trazado de antemano, así lo hacen los aserradores: 2.° haciendo subir y bajar la sierra en su propia direccion, sin que vaya adelante ni atrás, y dando al cuerpo que se ha de aserrar el movimiento curvilíneo que convenga. De esta manera se labran superficies cilíndricas en los *molinos de sierra*.

Construccion de cilindros por los arquitectos. Cuando los arquitectos quieren labrar una superficie cilíndrica, como el arco de una puerta, de una bóveda, ó de un puente, &c., lo primero que hacen es formar de madera una superficie cilíndrica, que presenta un relieve idéntico al contorno del arco que se va á construir. De trecho en trecho construyen un polígono ABCDE, fig. 33, inscrito en el contorno del arco, y dan á dicho polígono muchos lados para que forme con el arco segmentos fáciles de llenar sin gastar mucha madera. Llenan en efecto estos segmentos con trozos de madera, sobre los cuales asientan unos maderos rectos que se ven por un estremo en la fig. 33. A esta armazon llaman una *cimbra*. La parte superior de dichos maderos forma la superficie cilíndrica, sobre la cual asientan los albañiles las piedras de la bóveda, las cuales llaman *dovelas*.

Medida de las superficies de los cilindros. Podemos considerar la superficie de los cilindros como compuesta de tantas aristas cuantas pueden distinguir nuestros ojos, trazándolas tan cerca como sea posible unas de otras y mirar el cilindro como un prisma terminado por un gran número de caras sumamente estrechas.

En tal caso el contorno de la base es un polígono que se confunde á nuestros ojos con el que sirve de base al prisma.

Si el cilindro es recto, su superficie (sin contar las bases) *es igual al contorno de una de estas bases multiplicada por su altura.*

La superficie total del cilindro recto circular, inclusas las bases, es igual á la circunferencia de una de las bases multiplicada por la longitud de una arista, mas la longitud de un radio de las bases.

En el prisma ABCD.... *abcd*...., fig. 34, podemos cortar la superficie longitudinal por la arista A*a*, y hacer sucesivamente girar cada cara B*bc*C, C*cd*D, &c. para llevarla al plano de A*ab*B. Entonces formamos una figura plana compuesta de paralelas A*a*, B*b*, C*c*...., fig. 35, y de lados AB, BC, CD, DE...., *ab*, *bc*, *cd*, *de*.... perpendiculares á estas paralelas; lo que exige que ABCDE, *abcde* sean dos líneas rectas paralelas entre sí y perpendiculares á las aristas A*a*, B*b*, &c. El rectángulo producido de este modo es lo que se llama el *desenvolvimiento del contorno del prisma*; y la superficie del prisma es *evolvible* porque este desenvolvimiento ha podido ejecutarse sin que las partes de superficies A*ab*B, B*bc*C, &c. hayan tenido que alargarse ó acortarse para quedar lado á lado y formar una superficie plana contínua. Nosotros consagraremos una leccion especial á las superficies evolvibles, entre las cuales deben contarse los cilindros que se pueden considerar como prismas de una infinidad de lados.

Hagamos en el cilindro recto, fig. 34, dos secciones oblícuas y paralelas MNPQ, *mnpq*; despues tratemos de medir la superficie cilíndrica comprendida entre estas dos secciones. Es evidente que las partes de aristas M*m*, N*n*, P*p*, Q*q*...., que son líneas rectas paralelas comprendidas entre dos planos paralelos son iguales. Si pues se considera el cilindro como un prisma de un gran número de caras la superficie de los paralelógramos que representan cada cara será:

**Superf.* M*mn*N = AB × M*m*;
Superf. N*np*P = BC × N*n* = M*m*;
Superf. P*pq*Q = CD × P*p* = M*m*, &c.

Por consiguiente superf. MNPQ.... *mnpq* = ABCD..., multiplicado por M*m*:

Quiere esto decir que es igual al contorno de la base ABCD... multiplicada por la longitud de una de las partes de aristas comprendidas entre los dos planos paralelos.*

Si nos pidiesen que midiésemos la superficie del tronco de cilindro ABCD.... MNPQ, fig. 34, seria necesario desenvolver la superficie cilíndrica, señalando cada arista AM, BN, CP...., segun su longitud, y determinar sobre el desenvolmiento, fig. 35, la superficie ABCD.... MNPQ....

Suponiendo que el cilindro fuese un prisma de un gran número de caras iguales, se tendria, si se hace AB = BC = CD....

Superficie de tronco del cilindro ABCD... MNPQ... = AB (AM + BN + CP + DQ....), esto es, *el ancho de una de las caras multiplicada por la suma de las aristas de estas caras.*

Medida del volúmen de los cilindros. Si consideramos el cilindro como un prisma compuesto de un gran número de caras, veremos que su volúmen es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura.

La base del cilindro recto circular, que es un círculo, tiene por superficie su circunferencia multiplicada por la mitad de su radio.

Luego el volúmen de este cilindro es igual á la circunferencia de la base multiplicada por la mitad del radio de esta base y por la altura del cilindro.

Los prismas oblícuos ó rectos de una misma base y altura son iguales en volúmen; *luego los cilindros oblícuos ó rectos de una misma base y altura son iguales en volúmen.*

Puede determinarse muy fácilmente el volúmen de un tronco de cilindro recto circular. Sea ABC, fig. 36, el círculo que sirve de base á este cilindro y O*o* el eje: el volúmen del tronco de cilindro ABC*ef*.... es igual á la superficie de la base multiplicada por el eje O*o*, esto es, igual al volúmen del cilindro recto que tiene O*o* por altura.

A fin de demostrarlo imaginemos el cilindro recto ABC*amcn* cuya base superior tiene su centro en *o*. Yo digo que los dos volúmenes *amne*, *cmnf* son iguales. En efecto, observemos desde luego que siendo *o* el centro del círculo *amcn* el diámetro *mon* divide este círculo en dos partes iguales.

Ahora, alrededor de *mn*, como charnela, hagamos girar la cantidad de dos ángulos rectos el volúmen *mnae*, entonces el semicírculo *mna* se aplicará sobre el semicírculo *mnc*; todas las partes de arista como *ae* &c. se confundirán con las aristas *fc* &c.; finalmente el plano de *mne* se confundirá con el plano de *mnf*. Luego los dos volúmenes estarán comprendidos entre tres superficies que se confunden; por consecuencia tienen un mismo volúmen. Pero el cilindro recto tiene *mn a e* demas, y *mncf* de menos que el cilindro truncado ABC*ef*. Luego los dos cilindros son iguales en volúmen, y la medida del uno lo es tambien del otro.

Del mismo modo que hay sectores de círculo AOB, fig. 37, hay *sectores de cilindro* que tienen el sector de círculo por base y están determinados de un lado AB*ba* por la superficie misma del cilindro, y de otros dos lados por dos planos A*ao*O, B*bo*O que pasan por el eje O*o* del cilindro.

Un segmento de cilindro tiene por base un segmento de círculo ABC, fig. 38, y por contorno: 1.° la parte cilíndrica ACB*bca*; 2.° un plano AB*ba* paralelo al eje, y presenta la figura de un paralelógramo.

Aplicacion de las propiedades del cilindro á la determinacion de las sombras. Los rayos del sol cuando llegan hasta nosotros son tan aproximadamente paralelos, que los instrumentos mas finos tendrán dificultad en indicar la mas ligera diferencia en la direccion de dos rayos solares que caigan á una distancia bastante considerable uno de otro como á los estremos opuestos de un grande edificio. Esta es la causa de que en las artes se consideran los rayos de luz emanados del sol como exactamente paralelos.

Cuando una puerta, una ventana, ó una bóveda en arco de círculo ABCDE, fig. 39, está iluminada por los rayos solares A*a*, B*b*, C*c*, D*d*, E*e*...., estos rayos que son líneas rectas paralelas entre sí que pasan por

la circunferencia de un círculo, trazan un cilindro ó un prisma del que ABCDE es la base. Este cilindro separa toda la parte del espacio iluminada por el sol en lo interior de la puerta, de la ventana ó de la bóveda, y la parte situada en la sombra.

La consideracion de los cilindros, de su figura y de su posicion es pues de la mayor importancia cuando hay que determinar las partes iluminadas y las partes situadas en la sombra, en la arquitectura, la pintura, y generalmente en todas las artes del dibujo.

En las lecciones siguientes daremos los medios de resolver geométricamente las principales cuestiones relativas á las sombras.

Aplicacion de las propiedades del cilindro á la geometría descriptiva. Una de las aplicaciones mas útiles de las propiedades del cilindro es el uso que se hace de esta superficie para representar en los planos el dibujo ó la proyeccion de líneas curvas cualesquiera.

Supongamos que haya en el espacio una curva ABCDE...., fig. 40, que se ha de representar en el plano de proyeccion MNPQ. De cada uno de los puntos de esta curva se bajará una perpendicular á dicho plano. Los puntos *a, b, c, d, e....*, que serán en este plano los pies de las perpendiculares, formarán una curva que será la representacion geométrica, ó como se dice, la *proyeccion* de la curva ABCDE.

Por lo comun se proyecta cada curva en dos planos MNPQ, PQRS, perpendiculares uno á otro, de suerte que las líneas de proyeccion A*a*, B*b*, C*c*...., perpendiculares al primer plano son paralelas al segundo, y las líneas de proyeccion A*a'*, B*b'*, C*c'*,.... perpendiculares al plano son paralelas al primero. Las dos proyecciones *abcde*, *a'b'c'd'e'*, segun veremos al tratar de la interseccion de las superficies, bastan para la determinacion completa de la curva ABCDE.... que representan.

Sabemos que con el plano se pueden construir ó fabricar los cilindros, y recíprocamente con los cilindros se pueden construir ó fabricar los planos.

Aplicacion del cilindro á las labores agrícolas. Con un cilindro que se hace rodar sobre un camino recientemente enarenado sobre un tapiz de cesped, ó sobre una tierra recientemente labrada, se aprietan las partes altas para ponerlas al mismo nivel que las partes mas hundidas, y así se allana el terreno para hacer una superficie plana.

Aplicacion del cilindro al ojaldrado de la masa. El tahonero emplea un cilindro de madera que llama rodillo, y le hace rodar comprimiéndole y empujándole con sus manos para aplastar la masa y transformarla en hojas terminadas superior é inferiormente por superficies planas.

Combinacion de los cilindros: Los *laminadores.* En lugar de emplear un solo cilindro para producir superficies planas, es mucho mas ventajoso combinar dos cilindros cuyos ejes sean paralelos. Sean AB, *ab*, fig. **41**, los ejes de los dos cilindros que estan dispuestos de manera que no pueden acercarse ó apartarse uno de otro sino lo que se quiere, y tanto como se quiere. Los dos ejes han de estar bien paralelos uno á otro, y los cilindros fabricados con toda la exactitud posible para que esten en toda su estension á la misma distancia uno de otro. Esto sentado, si se pasa entre los dos cilindros una chapa de metal ó de cualquiera otra sustancia, capaz de aplastarse la chapa, se reducirá al grueso señalado por la distancia mas corta de los dos cilindros.

Si despues de haber pasado la primera vez la chapa por entre los cilindros se acercan éstos un poco para volverla á pasar entre ellos, se volverá á aplastarla una cantidad igual á lo que se hubiesen acercado mas los dos cilindros. Siguiendo este sistema se reducirá sucesivamente la chapa á una hoja exactamente del grueso que se desea, tal es el efecto de los laminadores.

Aplicacion á la fabricacion del papel. La industria ha hecho un sin número de aplicaciones de esta propiedad de los cilindros. Dos cilindros revestidos de paño comprimen y reducen á un pliego contínuo la materia de un papel, al cual dan el largo que

se desea, y se llama por esta razon *papel sin fin.*

Aplicacion á la imprenta. Se colocan en unos cilindros de un diámetro considerable los caractéres de imprenta, necesarios para la impresion de un pliego. Estos cilindros estan en contacto con otros cilindros forrados de cuero y cargados de tinta, la cual va pasando en cantidad conveniente sobre los caractéres de imprenta. Despues pasa un pliego de papel entre los dos cilindros que tienen los caractéres, y de ellos recibe la impresion. Este medio que permite imprimir con suma rapidéz es sobre todo útil para la publicacion de los diarios, que no pueden emplear mas que un corto número de horas entre la composicion y la remision del impreso, cualquiera que sea el número de ejemplares que hay que tirar.

Empléase igualmente los cilindros para imprimir en las telas dibujos de todas clases. Grábanse en los cilindros de cobre los dibujos que se quieren imprimir.

Impresion litográfica. Las prensas litográficas no emplean mas que un cilindro. La hoja de papel que ha de recibir la impresion está puesta sobre la piedra, despues de hecho el dibujo é impregnado de tinta. Pasa luego un cilindro sobre el todo, ejerciendo una presion igual en cada parte, lo que produce la igualdad y la belleza de la impresion.

Impresion de los grabados sobre cobre. Para imprimir con láminas de cobre, la lámina que es plana, y la hoja de papel que ha de recibir la impresion, pasan á la vez entre dos cilindros que las comprimen una contra otra.

Aplicacion de los pares de cilindros á la fabricacion del hierro, y á su reducion á barras. Segun el método antiguo, que todavia se usa casi universalmente en el continente europeo para fabricar el hierro, despues de calentar escesivamente una masa de fundicion, llamada *zamarra*, la ponen sobre un yunque, donde la golpean con un martillo muy pesado, que hace saltar la materia impura ó la escoria que contiene. Este

martillo reduce el hierro á prismas ó barras de una configuracion mas ó menos imperfecta. De algunos años á esta parte los ingleses han empleado los pares de cilindros para reemplazar con gran regularidad el trabajo grosero del martillo. Imagínense dos pares de cilindros, colocados de manera que presenten cierta abertura ó luz, cuyo perfil es varios lozanges, cada vez mas pequeños, como en la fig. 36, ó unos rectángulos cada vez menores, como en la fig. 43. La masa de hierro labrada á escuada lo bastante con el martillo, pasa entre los cilindros, y sucesivamente por las aberturas 1, 2, 3.... que van disminuyendo su grueso, y la reducen á barras cuadradas ó chatas. Este método tiene la ventaja grande de estirar con mucha regularidad las fibras del hierro. En Francia se ha empezado á introducir, bien que por desgracia en muy pocos parages.

Aplicacion de los cilindros al cardado. Se ha hecho una aplicacion feliz de los cilindros de laminar para cardar el algodon y la lana, y tambien para dividir el cáñamo y el lino.

Dos cilindros, fig. 44, dispuestos bien paralelamente estan erizados de puntas de cardas, puestas con igualdad en las superficies de dichos cilindros, de manera que las puntas del uno engranen libremente entre las puntas del otro. Cuando pasa el algodon, la lana, el cáñamo ó el lino entre estos cilindros, que se mueven en sentido contrario, ó en el mismo sentido, pero con velocidades diferentes, los filamentos *de estas sustancias* tienen que ensancharse paralelamente, y forman al salir de los cilindros una cinta plana que se llama una carda.

Aplicacion de los cilindros á la hilanza del algodon, del cáñamo, &c. Combínase un cilindro recto circular liso AB, con un cilindro canaleado CD, fig. 43. Los hilos pasan primero por entre dos cilindros, luego pasan por entre otros dos cilindros, que estan paralelos á los primeros, y llevan el hilo con mas velocidad. Esto hace que la parte del hilo, situada en-

tre los dos pares de cilindros, se alargue en proporcion de la diferencia de las velocidades y de los dos pares de cilindros. Alargando de esta suerte los hilos se hacen mas delgados ó finos, que es una de las grandes ventajas que tienen las máquinas modernas de hilar.

La fabricacion de los cilindros acanalados pertenece á la clase de operaciones mas delicadas de la industria, pues requiere suma exactitud. El menor defecto de paralelismo en las canales, la mas leve desigualdad en los diámetros de los cilindros, sería suficiente para producir en los hilos muy finos unas diferencias que les quitaria toda la fuerza é igualdad que son compatibles con su finura.

Acanalar los cilindros. Hácese uso para esto de un mecanismo que sirve para dividir el círculo en partes iguales, valiéndose de los medios de que hemos hablado en la leccion tercera.

Despues de haber determinado el número de canales, y haberse situado en el círculo de division que dá este número, se empieza la primera canal con una herramienta cortante, que camina á lo largo de una guia ó ristrel exactamente paralela al eje del cilindro, y luego retrocede. Hecha la primera canal se adelanta un punto el indicador de las divisiones del círculo. El cilindro se presenta en la posicion conveniente para abrir la segunda canal que se hace del mismo modo con la herramienta cortante, y así sucesivamente.

Se suelen combinar los cilindros de otra manera, y es metiendo un cilindro macizo en un cilindro hueco, tal es el movimiento de los embolos en las bombas, fig. 20, y de un corcho en una botella; y tal es el movimiento de las dos partes de un estuche, figura 47, de una caja redonda de tabaco de polvo, figura 48, &c.

Hácese uso tambien de cilindros huecos que encajan exactamente unos en otros. Tal es el sistema de los anteojos de teatro, y de los anteojos marinos que pueden alargarse segun se desee, como en AB, fig. 49,

y acortarse como en *ab*. Es evidente que de la perfecta ejecucion de cada cilindro hueco, sea interior, sea esteriormente, depende el movimiento fácil y seguro de los encajes de instrumentos de esta especie.

Los ingleses se valen de un encaje ó enchufado de cilindros para unir las grandes líneas de caños que emplean para conducir las aguas en sus ciudades. Como el hierro esperimenta cierta dilatacion muy sensible para el aumento de calor, y una contraccion análoga cuando el calor se disminuye, si los tubos estuviesen ajustados en una gran longitud, sin que sus estremos pudiesen moverse libremente, se romperian. Para obviar á este inconveniente terminan un estremo de cada porcion del tubo con un cilindro ABED mas largo que el cuerpo del caño CF, fig. 50. En esta parte mas larga encaja el estremo *mn* del caño siguiente. El encaje es tal que los dos caños pueden resbalar un poco el uno dentro del otro, á pesar de la soldadura que los une, y prestarse de este modo, sea á las dilataciones, sea á las contracciones producidas por las variaciones de la temperatura.

LECCION NOVENA.

Superficies cónicas.

Descríbese la *superficie de un cono* SABCDE, figura 1, con una línea recta que pase siempre por el mismo punto S y por una curva ABCDE. Las rectas SA, SB, SC...., son las *aristas* y el punto S es el *vértice* del cono.

En el caso particular en que el vértice S y la curva ABCDE, se hallan en un mismo plano, la superficie del cono llega á ser la superficie misma del plano. Así, cuando una caballería anda, por ejemplo, una noria, el timon en línea recta que vá del árbol de la rueda al punto en donde está atado el caballo describe un cono SABCD...., fig. 3, si el vértice está fuera de la curva ABCD, que describe el punto en que está atado el caballo. Pero cuando la palanca es horizontal este cono se convierte en un plano; porque el vértice S está en el plano del círculo *abcd* que anda el caballo; en cuyo caso las aristas S*a*, S*b*, S*c*...., se convierten en radios del mismo círculo.

La geometría considera el cono, fig. 1, como una superficie que se prolonga sin fin por ambos lados; y lo mismo las líneas rectas que son las aristas. Considera como que no forman mas que una superficie, dos conos formados por las partes de cada arista, mas acá y mas allá del *vértice*, al que llaman por esta razon el *centro del cono*.

La industria ofrece algunos ejemplos de estos conos completos ó dobles. El relox de arena, fig. 2, que usan en los navíos para medir el tiempo se compone de dos conos, dispuestos del modo que queda dicho En un cierto tiempo que se toma por unidad toda la arena pasa del cono superior al cono inferior; y se

cuentan tantas unidades de tiempo como veces se vuelve el relox de arena.

En las artes los conos son siempre de una estension limitada, y no se considera en general mas que una sola parte ó area SABCD, fig. 1.

Cuando el cono está terminando por una area plana ABCDE, fig. 1, se llama esta area *la base del cono*. En esta leccion suponemos que cada cono está terminado por una base plana.

El *cono recto circular ó cono regular*, el mas sencillo de todos los conos, es aquel cuya base ABCDEF, fig. 3, es un círculo, y tiene el vértice S en el eje SO del círculo.

El *cono circular oblícuo*, *fig.* 5, tiene por base un círculo. Pero sus aristas no son todas iguales entre sí; la línea recta SO tirada del vértice al centro de la base no es perpendicular al plano de esta base.

En el cono regular las aristas SA, SB, SC, fig. 3, son líneas oblícuas, igualmente distantes de SO, perpendicular al plano del círculo; y por tanto son iguales entre sí. Luego todas las aristas de este cono son iguales entre sí, y forman el mismo ángulo con el eje.

Supongamos que en un cono producido por nuestras artes tracemos tantas aristas y tan finas que no ofrezcan á nuestros ojos mas que el aspecto de una superficie perfectamente contínua y cubierta de líneas, cuyas distancias tengan tal grado de pequeñéz que sean imperceptibles á nuestra vista. La superficie compuesta así de triangulillos planos entre las diversas aristas no será diferente, por decirlo así, de un cono geométrico. Cuando nosotros tomemos una de estas superficies por la otra, los errores, si los hay, serán tan pequeños que nuestros sentidos no los percibirán y serán nulos para la industria.

Por consecuencia, un cono puede considerarse siempre como una pirámide de muchas caras triangulares, cuyo ancho sea sumamente pequeño, y cuya altura se confunda con lo largo de las aristas.

En tal caso todas las medidas de superficie y de volúmen dadas para las pirámides (leccion sétima) se aplican inmediatamente al cono.

Siendo el cono recto circular una pirámide regular: 1.° la superficie total de las caras, *ó la superficie curva del cono recto circular es igual al contorno de su base multiplicado por la mitad de una arista*; 2.° *la superficie total del contorno circular y de la base del cono recto es igual al contorno de la base multiplicado por la mitad de una arista mas la mitad del radio de la base.*

El volúmen de un cono cualquiera es igual al producto del tercio de su altura por la superficie de su base.

Si se corta el cono por un plano paralelo á su base se forma un tronco de cono, cuya superficie y volúmen se miden del mismo modo que la superficie y volúmen del tronco de pirámide.

La superficie del tronco de cono regular es igual á la mitad de la suma del contorno de las dos bases, multiplicada por la longitud de una arista comprendida entre estas bases.

Si se corta una pirámide por un plano paralelo á la base, fig. 7, la pirámide menor que resulta es semejante á la mayor. Esta propiedad que es verdadera, cualquiera que sea el número de caras de la pirámide mayor, es igualmente verdadera en el cono, y lo son tambien todas las consecuencias que se deriban. Luego: 1.° cuando se corta un cono por un plano paralelo á la base resulta un cono menor *semejante* al mayor; 2.° cuando dos conos son *semejantes, la superficie* de su parte curva es proporcional *al cuadrado* de las líneas correspondientes en los dos conos; por ejemplo, al cuadrado de las aristas; 3.° *las bases* tienen tambien *su superficie* proporcional al cuadrado de las líneas correspondientes; 4.° *los volúmenes* de los conos *semejantes* son proporcionales *á los cubos* de las líneas correspondientes.

Formemos un tronco de cono ABC.... *abc*...., fig. 7, separando un cono menor de otro mayor por un plano que lo corte. Es claro que se tendrá el volúmen del tronco de cono calculando á parte el volúmen del cono menor para restarlo del volúmen del mayor: siendo cada uno de estos volúmenes igual al producto de la base por el tercio de la altura la operacion no presenta ninguna dificultad.

Cuando un cono no es recto y circular, ó solamente cuando el cono no es recto, no se puede medir su superficie por las reglas que acabamos de dar.

Para medir la superficie del cono es menester descomponerla en un número de triángulos suficiente para el grado de exactitud á que se quiere llegar. Despues se trasladan en un plano estos triángulos los unos al lado de los otros. Así es como se han trasladado en las fig.ˢ 4 y 6, todos los S′A′B′, S′B′C′, S′C′D′...., en las fig.ˢ 3 y 5. Es evidente que la superficie curva del cono es igual á la superficie plana S′A′B′C′.... Mediráse esta última superficie por los métodos que hemos espuesto en la leccion sesta.

Despues de haber dado las medidas esenciales de superficie y de volúmen del cono veamos qué uso hacen las artes de los conos.

El arquitecto y el carpintero cubren las torres circulares con conos rectos circulares, fig. 8, que tienen por eje el eje mismo de la torre. *El artillero* fabrica las bocas de fuego dándoles la forma de varios troncos de conos cuya base mayor está del lado de la culata, fig. 9. El *sombrerero* dá á los fieltros que destina para sombreros de los hombres y de las mugeres la figura de un cono con un borde plano ó curvo. En la variacion de las dimensiones de este cono, ó tronco de cono, consiste la infinita diversidad de sombreros que produce el capricho y la fecundidad caprichosa de nuestras modas (véanse fig.ˢ 10, 11 y 12).

El fabricante de órganos termina la parte inferior

de sus cañones cilíndricos con un tronco de cono ABST, fig. 13. Los cañones cuyos sonidos imitan los de la trompeta, y cuya reunion tiene el nombre de *trompetillas* ABST, fig. 14, estan formados con un tronco de cono.

El arquitecto por motivos de solidez engruesa algunas veces sus columnas desde la base hasta el tercio de su altura, y disminuye siempre el diámetro desde este punto hasta la parte que sostiene el capitel. Cuando se trata de ejecutar columnas demasiado altas para poder sacarlas de un solo trozo se dividen con varios planos paralelos y se consideran como troncos de cono las diversas partes en que se ha descompuesto la columna, fig. 15; córtase pues cada una de estas partes como si fueran troncos de conos.

El carpintero de naves da á los mástiles una forma semejante á la de las columnas, disminuyendo gradualmente sus diámetros desde el pie hasta el vértice.

El cono se ejecuta de muchas maneras análogas á las que se emplean para el cilindro.

Desde luego se puede formar un polígono regular ABCDE, fig. 3 y 5, de un gran número de lados, y labrar cada una de las caras planas SAB, SBC, SCD.... valiéndose de los medios esplicados en la leccion relativa á los planos.

* Si en lugar de un cono completo no hay mas que un tronco de cono recto circular ABCD.... *abcd*....., fig. 16, es necesario labrar desde luego las dos caras planas ABCD...., *abcd*.... perfectamente paralelas. Señalaránse en estos planos dos puntos O, *o*, que esten en una recta perpendicular á los dos planos. Por los dos puntos O, *o*, se tirarán las rectas paralelas OA, *oa*, cuya longitud sea la de los radios de los dos círculos ABCDE, *abcde*, que se trazarán. *

* Hecho esto dividamos las dos circunferencias en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de direccion A, B, C, D...., *a*, *b*, *c*, *d*...., tiremos las perpendiculares al radio para formar dos polígonos regulares que rodeen á dos círculos. Se labrarán las caras planas y trapecios que tienen por bases inferior y superior los lados de los dos polígonos I. II. 2. 1, II. III. 3. 2, III. IV. 4. 3,.... De esta manera se formará un tronco de pirámide que envuelva el cono. Cortando las aristas I. 1, II. 2, III. 3, IV. 4.... con un cepillo ó cualquiera otro instrumento propio para ponerlas planas, hasta que las nuevas caras planas que se van á formar toquen á los dos círculos, se tendrá un tronco de pirámide que tenga dos veces tantas caras como el primero, y se acercará mucho mas á la figura del cono. Continuando así cortando las aristas se conseguirá acercarse siempre mas á la verdadera figura del cono para llegar al grado de exactitud que requieran las necesidades de la industria. *

El método que acabamos de indicar no es como se ve mas que un método de aproximacion. Y para ejecutar un cono de una manera perfectamente continua son necesarios otros procederes.

Pueden ejecutarse las superficies cónicas con un torno, haciendo caminar la herramienta cortante P, fig. 17, sobre un ristrel ó guia rectilínea NM fija y paralela á la arista AS. En cada posicion de la herramienta describirá un círculo cuyo eje será la línea recta que pasa por las dos puntas del torno. El conjunto de los círculos descritos de esta manera formará la superficie del cono SABC, fig. 17. Así es como se forma el *trompo* SAC, fig. 18.

Puede ejecutarse un cono recto circular haciendo dar vueltas alrededor de un eje SO, fig. 3, á la recta generatriz que forme siempre un mismo ángulo con este eje (véase la leccion undécima).

Por la definicion misma se produce un cono cualquiera con una recta movible sujeta á pasar siempre por un punto tomado por vértice.

Aplicacion al fisionotrazo. Algunos se sirven de este instrumento para copiar con exactitud un perfil ABCD..., fig. 19. Una barilla rectilínea que puede dar vueltas

alrededor del punto fijo S se apoya por un estremo sobre el perfil ABCD....; el otro estremo que tiene un lapiz puntiagudo se apoya contra un papel estirado cuyo plano es paralelo al del perfil. *La curva* abcd...., *descripta por este lapiz es semejante al perfil* ABCD....

* Para demostrarlo tiremos OS*o*, fig. 19, perpendicular á los dos planos paralelos del perfil y del retrato, y sean O, *o*, los puntos en que esta perpendicular encuentra estos dos planos. Consideremos la barilla rectilínea que sirve para trazar el retrato en una posicion cualquiera, como por ejemplo AS*a*. Tiremos OA, *oa*. Digo que los dos triángulos rectángulos ASO, *a*S*o* son semejantes. En efecto, el ángulo ASO es igual al ángulo *a*S*o*; pues que son dos ángulos opuestos al vértice; ademas AO, A*o* son paralelas; luego los triángulos ASO, *a*S*o* son semejantes, y se tendrá

$$SO : SO :: SA : SA :: OA : oa.$$

De la misma manera se demostrará

$$SO : So :: SA : Sa :: SB : Sb :: SC : Sc :: SD : Sd....$$
$$SO : So :: OA : oa :: OB : ob :: OC : oc :: OD : od....$$

* Pero las líneas OA y *oa*, OB y *ob*, OC y *oc*.... son paralelas dos á dos; luego las figuras ABCDEF.... *abcdef*...., son figuras semejantes cuyas líneas correspondientes son paralelas y proporcionales á las distancias del punto fijo S, á los planos del perfil y del retrato; luego por último el perfil ABCD y su retrato *abcd* son semejantes.*

La naturaleza traza superficies cónicas á la manera del fisionotrazo, por medio de los rayos emanados de cada punto luminoso. Estos rayos entran en nuestro ojo por la pupila y se cruzan en el punto S, fig. 22, de donde pasan á una superficie PQ llamada la retina. Tal es la tabla en que la naturaleza produce los contornos y conserva los colores de los objetos mismos. Esta impresion producida en la retina se transmite al nervio óptico el cual la transmite al cerebro, sitio de nuestra inteligencia.

Así el admirable fenómeno de la vision se efectúa en el hombre, y en la mayor parte de los animales, por medio *de superficies cónicas*, trazadas en el espacio y en nuestro ojo por los rayos de luz que salen en todos sentidos de los cuerpos que son luminosos, por sí mismos ó por reflexion.

Todos los puntos luminosos que pueblan el cielo en una noche serena, todos los objetos de que se compone un inmenso paisage, mirados en un dia claro, se pintan en nuestro ojo con sus proporciones, sus formas, sus colores y sus tintas por medio de conos, cuya posicion acabamos de indicar.

Cámara obscura. El arte imita la naturaleza construyendo una cámara, comparable á lo interior de nuestro ojo, sin dejar entrar en ella la luz mas que por un vidrio ó lente, semejante á la pupila S de nuestro ojo, fig. 22. La luz transporta á las paredes de esta cámara como á la retina *abcd* los objetos, sus colores, sus formas y sus movimientos. Si se recibe sobre un papel esta luz se pueden dibujar los contornos que traza y reproducir sus tintas, sus sombras y sus reflejos.

Los rayos emanados de un punto único S, fig. 20, que encuentran una superficie opaca *abcdef*, no pueden pasar mas allá; y los rayos que pasan rasando el contorno de esta superficie se prolongan, separando de la parte del espacio iluminado por el punto luminoso otra parte que está privada de luz por el cuerpo opaco. Esta parte privada de luz es lo que se llama la *sombra del cuerpo opaco*. Así, cuando una superficie ó cuerpo opaco está situada delante de un punto luminoso, la sombra de esta superficie, ó de este cuerpo, está limitada por una superficie cónica, que tiene el punto luminoso por vértice.

Siluetas. Hánse servido de esta propiedad de los rayos luminosos para trazar en un plano retratos semejantes á los perfiles dados. Sitúase el perfil que se trata de imitar *abcde....*, fig. 20, en un plano para-

lelo al otro sobre el cual se quiere trazar el retrato. Una luz como la de una vela, puesta á una distancia conveniente, se convierte en el vértice de un cono que tiene por base el perfil que hay que copiar. El cono se prolonga hasta el plano del retrato, de manera que trace sobre este plano *una base nueva* ABCD.... semejante á la primera, y señalada por el contorno que sirve de límite á la sombra que forma el perfil: esta base es la *silueta* de este perfil.

Hemos puesto las mismas letras en la fig. 19 del *fisionotrazo*, y en la fig. 20 de la sombra proyectada; porque la demostracion que hemos hecho para la fig. 19 se aplica exactamente á la fig. 20, y conduce á la misma consecuencia.

Sombras chinescas. Se ha sacado partido para entretener á los niños de la propiedad que tienen las superficies cónicas de reproducir en un plano dado el perfil exacto de una figura y de un grupo cualquiera de figuras. Una luz única alumbra á unos muñecos de carton, ó á personas verdaderas, y arroja la sombra de las escenas que representan en una cortina que, sin permitir que se vea al través, deja pasar bastante luz en las partes iluminadas para que el espectador vea distintamente las partes situadas en la sombra. Estas partes son las bases de superficies cónicas que tienen por vértice el velon, ó cualquiera otro punto luminoso, situado detras de la cortina, y todas sus aristas pasan por el perfil de las personas de quienes se quiere reproducir la posicion y la forma.

Si el mismo objeto AB, fig. 21, cuya sombra MN está proyectada sobre la cortina RR, se aleja del punto luminoso S, y se acerca hácia *ab*; la sombra proyectada por *ab* no es mas que *mn*, y se halla disminuida. Así, quedando la misma la posicion del punto luminoso basta acercar á la cortina el objeto representado para disminuir la estension de la sombra; asi como alejando el objeto de la cortina crece mas y mas esta sombra. Al contrario, dejando fijo el objeto, segun que se acerque ó que se aleje de la cortina el punto luminoso, la sombra proyectada se aumentará ó disminuirá.

Esta variedad en la magnitud de las sombras que conservan la misma forma, y la diversidad de las escenas que resultan del movimiento de estas sombras, producen todo el interés de este género de espectáculos. Las propiedades de las superficies cónicas permiten reducir á trazados geométricos exactos los efectos deseados, y las proporciones que convienen á esta diversion de óptica. Hablemos ahora de una aplicacion mucho mas importante que la de las sombras chinescas.

Principio de la perspectiva. Si de un punto fijo S, fig. 22, dirije el ojo todos los rayos visuales posibles á la curva ABCD, formarán estos rayos un cono SABCD. Si se determina la seccion *abcd*, hecha en este cono por un plano MN, esta figura *abcd* será en el plano MN la representacion, ó como se dice, la *perspectiva* de la fig. ABCD. En cuanto á sus formas hará el mismo efecto sobre el ojo, esto es, producirá en la retina la misma imágen que ABCD; pues que las rectas S*a* y SA, S*b* y SB, S*c* y SC, &c., se confunden.

Así pues, el resultado de la perspectiva es representar los objetos de manera, que vistos desde un punto S, produzcan en nuestra retina la misma imágen que los objetos. Nuestra concepcion recibe imágenes semejantes, sea que las produzca el objeto ó dicha representacion, y así tenemos varias veces dificultad en distinguirlas, ó mas bien gozamos de una semejanza debida al efecto del arte. Tal es el orígen del placer intelectual que el espectador esperimenta á la vista de toda perspectiva bien hecha.

Si el ojo del espectador no se situase en el punto de vista S, el cono S*abcd* mudaria de figura, y no produciria en la retina de nuestro ojo una imágen perfectamente semejante á la que produce el objeto mismo. Tal es el efecto desagradable que se esperimenta mas ó menos cuando se situa el ojo en una posicion dife-

rente del punto de vista; punto llamado así porque es aquel del cual es menester ver la perspectiva para gozar plenamente de su verdadero efecto.

La perspectiva de las curvas produce conos, y la de los polígonos produce pirámides por la reunion de los rayos visuales de las líneas ó rectas, tiradas desde el ojo á los contornos de dichas curvas ó de dichos polígonos.

Si se mira un polígono regular, al cual sea paralelo el plano del cuadro, y el radio visual tirado por el centro del polígono sea perpendicular á este plano, la perspectiva será semejante á este polígono, y la imágen pintada en la retina del ojo será tambien el mismo polígono regular. Pero si se traza la perspectiva del polígono, y se cambia el punto de vista, la imágen que se pinta en la retina ya no es regular. El polígono parece mas largo en un sentido, y mas corto en el sentido perpendicular.

Por tanto, si la figura que hay que representar no se halla en un plano paralelo al plano del cuadro, la perspectiva tiene en general diferente forma que el objeto representado. Estas diferencias pueden ofrecer variedades infinitas. Sin embargo, hay reglas generales muy importantes para abreviar las operaciones de la perspectiva; operaciones necesarias para un gran número de artistas, para el arquitecto, el paisagista, el decorador, el escultor de bajos relieves, &c.

En primer lugar, si dos líneas rectas AB, CD, fig. 23, son paralelas al plano del cuadro MN, yo digo que sus perspectivas *ab*, *cd*, en este cuadro, serán dos rectas tambien paralelas.

* En efecto, si tiramos los rayos visuales S*a*A, S*b*B, S*c*C, S*d*D, las líneas AB, *ab*, lo mismo que CD *cd*, serán paralelas; pero AB y CD son paralelas entre sí. Luego las dos líneas perspectivas *ab*, *cd* serán tambien paralelas. Por consecuencia, estas líneas perspectivas jamás podrán encontrarse. *

Supongamos ahora que las líneas AB, CD, EF

fig. 24, paralelas entre sí, no lo sean al plano del cuadro MN.

* Por el punto de vista S, tiro hasta el cuadro MN una línea recta SO, paralela á las rectas AB, CD, EF que yo quiero poner en perspectiva. Despues tiro los rayos visuales SA, SB que atraviesen el cuadro en *a*, *b*. Estos dos rayos estan en un plano que pasa por S, por AB, y de consiguiente por SO, paralela á AB. Luego los tres puntos *a*, *b*, O, que estan todos en este plano y en el cuadro, estan en línea recta. Luego *ab* prolongada, pasa por O. Demostraríase lo mismo respecto de *cd*, *ef*, &c. Luego: *

Las líneas ab, cd, ef...., perspectivas de las paralelas AB, CD, EF.... *pasan siempre por un mismo punto* O, *prolongadas, si es necesario, cuando* AB, CD, EF *no son paralelas al plano del cuadro.*

Este punto O, muy notable, es lo que se llama el *punto de concurso* de la perspectiva de las paralelas AB, CD, EF....

Cuando se ponen en perspectiva algunos objetos, en los cuales hay muchas líneas paralelas, es muy ventajoso determinar el punto de concurso de las líneas de cada direccion. De este modo se tiene un punto de la perspectiva de cada una de ellas, y será suficiente conocer otro punto para tener su trazado completo.

Aplicacion á la arquitectura. Sobre todo, cuando se pone en perspectiva un dibujo de arquitectura, se puede sacar un partido muy ventajoso de los puntos de concurso. El mayor número de líneas que debe trazar un arquitecto son paralelas, ya al plano vertical que sigue la direccion de las caras del edificio que hay que representar, ya á los planos verticales perpendiculares á estas caras; y por último, de estas líneas las unas son verticales, y las otras horizontales.

Casi siempre el plano del cuadro en que se hace la perspectiva es vertical, fig. 25. En este caso todas las líneas que en el edificio mismo son verticales, lo son tambien en perspectiva. En cuanto á las líneas horizon-

tales, las que son paralelas al plano de la fachada, tienen su punto de concurso O, que es necesario determinar. Determínase del mismo modo el punto de concurso *o* de las horizontales, que son perpendiculares al plano de la fachada; con esto no queda mas que determinar que un solo punto por horizontal y por vertical. El método de las proyecciones suministra para esto medios sumamente fáciles; medios que indicaremos cuando se trate de la interseccion de las superficies.

Cuando se sabe que tales líneas son paralelas, y que se las ve en perspectiva, se debe examinar inmediatamente si éstas prolongadas pasarian por un punto único y convenientemente situado, que es su punto de concurso en el cuadro.

Cuando se pone un edificio en perspectiva en un cuadro vertical, fig. 25, lo que segun hemos dicho, es el caso mas ordinario en el dibujo y en la pintura, los puntos de concurso de todos los grupos posibles de horizontales paralelas estan situados sobre el plano horizontal que pasa por el punto de vista. En efecto, este es el único plano que se puede tirar por este punto paralelamente á las líneas horizontales. Así, por una parte el punto de concurso para la perspectiva de las horizontales paralelas á la fachada, y por otra el punto de concurso para la perspectiva de las horizontales perpendiculares á esta fachada, estan situados á la altura del punto de vista. Por consecuencia, á esta altura, las horizontales de las dos direcciones se hallan puestas en perspectiva en una línea horizontal O*o* situada á la altura del punto de vista.

Es fácil ver, fig. 25, que lo superior é inferior de las ventanas, que en el edificio estan en línea recta, se hallan del mismo modo en el cuadro de su perspectiva.

Esta es, en efecto, la propiedad de las diversas partes de una línea recta aislada ó no; porque basta unir, aunque no fuese mas que idealmente, las porciones de esta recta para formar una línea contínua, cuya perspectiva es una línea recta única, la que, por consecuen-

cia comprende la representacion de todas estas porciones de la línea recta que se ha querido poner en perspetiva.

Aplicacion á la pintura. En los cuadros donde el pintor pone personas, tiene cuidado de no situarlas todas en un mismo plano ni en la misma aptitud. Sin esta precaucion las personas aparecerian de una misma altura ó disminuidas segun una ley regular; de manera, que si estuviesen en pie y fuesen de una misma estatura, no solamente todos los pies estarian situados en una misma línea recta, sino que tambien todas las rodillas, todas las manos, todos los codos, todas las cabezas estarian respectivamente en una misma línea recta; y finalmente, todas estas líneas rectas concurririan en un mismo punto, lo que seria de una insoportable monotonía.

A fin de evitar esta regularidad tan dañosa para la pintura, el artista tiene cuidado de situar las personas á distancias diferentes del espectador, y para esto concibe varios planos paralelos al plano del cuadro. En el *primer plano*, que es el mas cercano del espectador, los objetos se pintan sobre el cuadro en la mayor dimension relativa, son menos grandes en el *segundo plano* y todavia menos en el *tercero*, &c.

En el primer plano, ó muy cerca de él, es donde los artistas colocan por lo comun sus principales personages, cuyas dimensiones llaman mas la atencion del espectador.

Segun sea el plano donde estan las figuras así su perspectiva deberá tener una cierta dimension. Si el pintor no la determina exactamente, su pintura es falsa, y sus personages no estan á las distancias á que ha querido ponerlos; si ha situado bien sus cabezas y ha dirigido bien la pupila de sus ojos, las figuras que deberian mirarse no se miran, &c.

Hay otras muchas faltas que los pintores pueden cometer y cometen contra la perspectiva; sobre todo cuando representan los cuerpos, los brazos, las pier-

nas, cuya direccion no es paralela al plano del cuadro, de donde resultará el que queden muy reducidas de longitud.

Estos *escorzados* suelen ser para los artistas la parte mas dificil del dibujo. Por lo comun no consiguen figurarlos sino valiéndose de modelos que ponen en la posicion misma en que los quieren representar, y ellos se situan respecto de estos modelos en la posicion en que estará el espectador respecto de la escena que quieren pintar.

El corto número de principios que acabo de esponer bastará en muchos casos para conocer la verdad ó la falsedad de las perspectivas de objetos que son conocidos. Sucede con frecuencia que los arquitectos y los pintores entienden mal las leyes de la perspectiva, y por consecuencia las aplican de una manera equivocada. Cuando los conocimientos geométricos esten generalmente estendidos en el comun de los franceses, muchas faltas graves que no advierten hoy dia mas que un corto número de inteligentes las notará el público mismo y no podrán cometerlas impugnemente. Entonces se verán obligados á hacer un estudio mas profundo de las aplicaciones de la geometría á la perspectiva, lo que dará á sus obras la exactitud de proporciones, indispensable para las obras perfectas en las bellas artes, así como en las artes que no tienen por objeto mas que la exactitud de las formas.

Aplicacion de la perspectiva al dibujo de las máquinas y á los productos de la industria. Cuando se quieren representar productos de industria ó máquinas se emplea casi siempre la perspectiva. Este método lleva al de las proyecciones ordinarias la ventaja de hacer visibles muchas partes que por el método de las proyecciones se ocultan las unas á las otras. Por ejemplo cuando se emplean las proyecciones por las líneas paralelas, es lo comun tomar el plano vertical de proyeccion, ó paralelo ó perpendicular á la fachada de un edificio. En el primer caso, los lados menores del edificio no son visibles, y en el segundo no lo es la fachada. La perspectiva tiene la ventaja como se ve en la fig. 25, de mostrar á la vez dos caras de un edificio.

El método de las proyecciones sirve para poner rigurosamente una figura en perspectiva. Cuando es dada esta figura lo mismo que el punto de vista en proyecciones horizontal y vertical, y tambien las trazas del cuadro, se tiene la perspectiva de un punto cualquiera, tirando una línea recta desde este punto al punto de vista, y buscando la interseccion de esta línea con el plano del cuadro. (Véase leccion décimatercia. Será conveniente que el profesor aplique este método á algunos ejemplos sencillos, como á la perspectiva de un cuadrado ó de un cubo con las figuras necesarias).

Para dibujar á la vista, ó como se dice *bosquejar*, un edificio, un producto de industria, una máquina, tiene la perspectiva la ventaja de poder dibujar los objetos como el ojo los percibe, sin hacer ninguna alteracion con el pensamiento á la apariencia de las cosas. Es bueno que los alumnos se habituen á estos diversos géneros de dibujo, para los cuales hallarán métodos fáciles en diversas obras especiales.

Aplicacion á las decoraciones teatrales. El decorador de teatros para aumentar la ilusion y para facilitar las mutaciones de teatros emplea primeramente un basto cuadro que forma la tela del fondo, en el cual pinta, por lo comun en perspectiva, los edificios y los paisages. Despues de esto sitúa de los dos lados en dos líneas que se separan una de otra, acercándose hácia el espectador, varios cuadros estrechos y altos paralelos entre sí y al telon del fondo: estos son los bastidores. En estos bastidores representa árboles ó columnas aisladas ó partes continuas. Pero este modo es imperfecto, porque las líneas que en los bastidores representan las fracciones de una misma línea recta miradas del punto de vista, parece que no forman todas mas que una misma

línea, pero no estan en la misma direccion cuando se miran de cualquiera otro punto de la sala. Sin embargo á pesar de este defecto una perspectiva bien bosquejada y bien pintada ofrece tambien bastante semejanza con la realidad de las cosas, y proporciona á los espectadores situados en varios puntos de la sala una ilusion muy agradable.

Proyecciones cónicas aplicadas á la geografía. A fin de representar los objetos mas notables en el globo terrestre y en el globo celeste, se emplea tal cual vez un sistema de proyecciones cónicas análogo á la perspectiva (1).

Aunque la mecánica no haga tanto uso de los conos combinados dos á dos, tres á tres, &c. como de los cilindros combinados de esta suerte, se hace uso de ellos con ventaja en muchas circunstancias.

Hace uso de los conos regulares unidos para transmitir por rozamiento los movimientos de rotacion de un eje á otro no siendo estos paralelos; y emplea conos regulares dentados, fig. 27, con el mismo objeto.

El arquitecto para ejecutar las grandes columnas las descompone en troncos de conos ó tambores que estan acanalados cuando las columnas han de estarlo: el arte de acanalar las columnas exige mucha exactitud en el trabajo. Si hay alguna cosa que pueda hacer juzgar bien de la rara habilidad que habian adquirido los obreros empleados en las construcciones de Atenas en los siglos mas gloriosos de aquella ciudad industriosa, es la perfeccion con que estan cortadas en superficies cónicas las canaladuras de los tambores de las mayores columnas, y el ajuste perfecto

(1) *Un polo de la tierra viene á ser el vértice de un cono que tiene por base cada una de las líneas curvas que hay que trazar en el hemisferio mas distante. La interseccion de este cono con el plano del ecuador es la proyeccion polar de esta curva.*

de estos diversos troncos de cono que forman canaladuras exactamente contínuas desde el capitel hasta la basa de la columna.

La exactitud en el acanalado ó dentado de las ruedas cónicas no es solamente un objeto de lujo y de vanidad como puede serlo el acanalado de las columnas. De esta exactitud dependen la facilidad y la economía en la transmision de los movimientos, como lo veremos cuando se esplique el movimiento de los engranados. (Véase primera parte de la mecánica, segundo volúmen de este curso).



LECCION DÉCIMA.

Superficies evolvibles, superficies gauchas &c.

Llamamos *superficies evolvibles* toda superficie que puede estenderse, desenvolverse, *desarrollarse* sobre un plano, sin que en esta operacion ninguna parte de la superficie tenga que alargarse, ni acortarse, ni abrirse, ni doblarse.

Ya hemos examinado dos especies importantes de superficies evolvibles que son los cilindros y los conos. Hemos visto en efecto que estas superficies pueden estenderse sobre un plano sin romperse ni duplicarse. Recíprocamente hemos visto que siempre se puede doblar una porcion de plano sin romperse ni duplicarse, de manera que forme un cilindro ó un cono cuya figura y dimensiones sean determinadas.

Por último, hemos visto que siempre se puede considerar el cilindro como un prisma compuesto de un gran número de caras planas que tienen la figura de un paralelógramo, y que se puede considerar el cono como una pirámide compuesta de un gran número de caras que tienen la figura de un triángulo muy estrecho.

De la misma manera se pueden considerar todas las superficies evolvibles, fig. 28, como compuestas de caras planas *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*d*.... terminadas por las líneas rectas A*a*, B*b*, C*c*.... que se llaman *aristas*.

Supongamos que se quiere *desenvolver* esta superficie para reducirla á la forma de una superficie plana. Empiécese por hacer girar la cara *a*A*b* alrededor de la arista A*b*, hasta que venga á situarse en el mismo plano que la 2.ª cara *b*B*c*; despues háganse girar estas dos caras alrededor de la arista B*c* hasta que vengan á situarse las dos en el plano de la 3.ª cara *c*C*d*. Con-

tinúese de este mismo modo hasta la última cara y la superficie quedará completamente *desenvuelta*.

*La diferencia que hay entre el cono y la superficie evolvible mas general, consiste en que en el cono todas las caras angulares tienen su vértice en un mismo punto, mientras que en una superficie evolvible cualquiera los vértices A, B, C.... de las caras *a*A*b*, *b*B*c*, *c*C*d*. &c. son diferentes. *

*Los geómetras consideran el cono como formado de dos cascos (fig. 1.ª leccion novena), y del mismo modo consideran las superficies evolvibles como que tienen tambien dos cascos: el primero es segun le hemos descrito, y el segundo está formado por la prolongacion de las aristas en A*a'*, B*b'*, C*c'*...., mas allá de la curva ABCD...., curva á que llaman *arista de retroceso*. Basta en general para las necesidades de las artes considerar un solo casco de las superficies evolvibles. *

Aplicacion. Cuando hay que conservar objetos que se tienen en estimacion se envuelven con una materia que sea de menos valor: ordinariamente se hace esto con una hoja flexible y plana de alguna tela, papel, carton, piel, hoja de lata, hoja de hierro, &c. tales son los estuches y cajas de carton, las bainas de las espadas, las cubiertas para embalages, las cajas de todas clases, los cucuruchos, las cubiertas de los especieros, boticarios, &c.

Todas estas cubiertas cualesquiera que sean sus pliegues y sus repliegues si los tienen, son evidentemente evolvibles. Solamente hay que observar que las materias que se emplean, sobre todo cuando son tejidos que pueden encogerse y alargarse, podrán diferenciarse en ciertos parages de las formas rigurosas de la superficie evolvible, segun la hemos definido y lo conciben los geómetras.

Aplicacion á las tapicerías y colgaduras. Lo mismo se diría de las superficies que forman las tapicerías y colgaduras con que se adornan nuestras habitaciones y lo interior de los monumentos públicos. Limi-

tándose á las formas de las superficies evolvibles rigurosamente geométricas, solo se tendrian pliegues rectilíneos, contornos duros, sin gracia ni variedad, y casi casi como los contornos de los ropages etruscos.

Los griegos parece que fue el primer pueblo cuya imaginacion graciosa y fértil comprendió cuáles eran las combinaciones felices que se pueden obtener, estudiando la doble propiedad que tienen las telas de plegarse en superficies evolvibles compuestas de aristas rectilíneas, y de encorvarse con uniformidad, apartándose de esas formas, segun las gradaciones sujetas á las leyes del buen gusto. Estas leyes en el adorno de los edificios pueden reducirse á principios generales.

Volvamos á las superficies rigurosamente evolvibles y veremos el uso tan estenso que tienen en las artes, y la utilidad que trae á la industria la resolucion geométrica de las cuestiones que se refieren á ellas.

Propongámonos construir una superficie evolvible, fig. 29, que pase por dos curvas ABCDEF, *abcdef*, que no esten en un mismo plano. A este efecto se supondrá que la curva ABCDEF es un polígono de un gran número de lados AB, BC, CD, DE.... Se tomará una regla bien recta y se pondrá de plano en un estremo sobre AB, y se hará girar alrededor de AB hasta que el otro estremo de la regla venga á encontrar la curba *abcdef* en dos puntos muy cercanos, *a*, *b*. Se tirarán las rectas A*a*, B*b*. Hecho esto se colocará la regla de manera que la cara ancha plana asiente á la vez sobre BC y B*b*: se señalará el punto *c* en donde esta cara plana encuentra la curva, despues se tirará C*c*. De la misma manera se determinarán D*d*, E*e*, F*f*.... y resultará la superficie evolvible ABCDEF*abcdef*...., la cual se diferencia muy poco de la que pasa rigurosamente por las dos curvas ABCDEF, *abcdef* (véase la leccion décimatercia).

Aserrado de piezas curvas. En la construccion de las naves suele ocurrir que han que serrar una pieza de madera segun la superficie cuyo contorno inferior *abc*....

y el contorno superior ABC.... estan trazados en dos caras de esta pieza. Si se quiere aserrar sin tener que torcer la sierra para que pierda su figura plana ó evolvible, es necesario que la línea recta, formada por los dientes de la sierra, esté dirijida de manera que se confundan sucesivamente con las aristas A*a*, B*b*, C*c*, fig. 29; y en este caso la sierra dividirá la pieza de madera, describiendo una superficie evolvible.

Aplicacion de las superficies evolvibles al corte de piedras. El corte de piedras hace un uso frecuente de superficies evolvibles, las que ordinariamente son cilindros y conos. Para construir las bóvedas que tienen formas complicadas, se determina, como lo esplicaremos en la leccion relativa á la *interseccion de las superficies*, la figura de todos los contornos de cada piedra que ha de entrar en la composicion de la bóveda, y la llaman *dovela*. A fin de que el edificio tenga la mayor solidéz posible, estas dovelas habrán de tocarse exactamente en sus partes ocultas, que se sostienen mútuamente, y se llaman las *juntas*. Es pues importante que las superficies de las juntas esten determinadas con una exactitud perfecta, á fin de poder hacer idénticas las dos caras de las dovelas, que deben aplicarse una contra otra. Se consigue fácilmente este objeto si se hacen evolvibles las caras de junta. Entonces se puede ejecutar rigurosamente con carton, con tablas delgadas, &c., la plantilla de cada cara evolvible; doblar la plantilla sobre la cara de junta, y ver si la regla se aplica perfectamente á esta cara, segun la direccion de las aristas.

Para manifestar cuánto importa dar á las superficies de junta, que hay en las diversas partes de un edificio, una forma que sea rigurosamente igual, citaré el ejemplo del *Panteon* de París. En este edificio, una cúpula espaciosa y muy alta habia de estar sostenida por cuatro grupos de columnas elegantes. Con la mira de lograr mas fácilmente el aspecto de una construccion perfecta cortaron los troncos de conos circulares, de

que se compone cada fuste de columna, haciéndolos cóncavos hácia el medio, para que los bordes se juntasen, sin que se viese el menor intersticio por fuera. La vista de estas columnas al principio de su ereccion dió idea de una obra maestra del arte. Mas, luego que cargó sobre ellas el peso inmenso de la bóveda, saltaron los bordes de las piedras del fuste, pues solo estaban en contacto, y no tenian bastante superficie para resistir á aquella presion. La cúpula hizo asiento, hasta que se llenó el hueco que se habia dejado en lo interior de las piedras del fuste. Pareció entonces preciso edificar enormes pilares en el centro de los grupos de columnas que sostenian la bóveda, con lo que desapareció la belleza de la construccion. Esta se hubiera conservado si hubiesen hecho las juntas de las piedras exactamente superponibles. Para ello suministra los medios la geometría, tanto en los casos sencillos, como en los mas complicados.

* Tracemos bien exactamente las aristas curvilíneas AB, BC, CD, DA, *ab*, *bc*, *cd*, *da*, fig. 30, de una dovela. Para cada cara de junta podemos determinar una superficie evolvible, que pase á la vez por AB y *ab*, otra por BC y *bc*, otra por CD y *cd*, y otra por DA y *da*. Haciendo la misma cosa con las dovelas adyacentes estaremos seguros de que las caras en contacto se aplicarán exactamente las unas contra las otras. Cuando se conozca la figura y la posicion de AB y *ab*, BC y *bc*...., nada será mas fácil que emplear el método dado, fig. 29, para determinar cada superficie evolvible. *

Cuando las aristas tienen que cubrir una gran superficie con las hojas ó chapas de una materia delgada y flexible, las doblan como superficies evolvibles, operando del modo siguiente:

Trazan sobre la superficie que van á cubrir, fig. 31, las líneas curvas ABCDE, *abcde*, *a'b'c'd'e'*, *a''b''c''d''e''* que, en toda su estension, estan separadas la una de la otra, á una distancia igual al ancho de las hojas ó chapas que pueden emplear. Despues empiezan á doblar

las hojas de manera que pasen por los contornos ABCDE y *abcde*, por *abcde* y *a'b'c'd'e'*, &c. Las ponen la una á continuacion de la otra, uniéndolas con una soldadura; ó las solapan, fijándolas una sobre otra.

Aplicacion de las superficies evolvibles para cubrir los domos ó cúpulas. Por el mismo método se ha cubierto con planchas de cobre la magnífica cúpula de la alhóndiga de París.

Aplicacion para forrar los navíos. Por este mismo método los constructores de buques forran, ó como dicen, *doblan* la carena de los navíos con chapas de cobre, como en ABCDEF, fig. 34. Los bordes de las chapas estan cortados en línea recta, aunque varias veces estos bordes se solapan, siguiendo una línea que no corresponde exactamente á este contorno. Pero con la solapa, que no es igual en todos los ángulos, ni rectilínea sobre todos los lados, se produce el mismo efecto que si se hubiesen cortado las chapas de cobre, siguiendo un contorno que convenga á su solapado riguroso, suponiéndolas soldadas una junto á otra.

Este medio, adoptado por los constructores de naves, es practicable ventajosamente, porque la superficie de la carena es muy grande, respecto de la estension de cada chapa que sirve para forrar, y el cobre que se emplea en esta operacion puede estenderse un poco en su parte intermedia para seguir en cada punto las dos direcciones de la curvatura de la carena. Esto se entenderá mejor cuando espliquemos las dos curvaturas de las superficies mas generales.

El *cartonero*, que forma una multitud de superficies diversas con hojas de papel y de carton, encoladas unas sobre otras, y unas al lado de otras, produce muchas superficies evolvibles, muy variadas en su figura y en las relaciones de su posicion.

Cuando el maestro de coches ha construido el maderamen de un coche, esto es, cuando ha puesto las piezas de hierro y madera que señalan los contornos angulosos del coche, y la armazon de las portezuelas

y ventanas &c., tiene que cerrar los espacios señalados por dichos armazones y contornos principales, lo que ejecuta con tablas de madera delgadas y flexîbles que dobla en general, dándoles la forma de superficies evolvibles, sujetas á pasar por los contornos dados. Tiene, pues, necesidad de conocer tambien la solucion del problema indicado, fig. 29 y 30.

El *calderero* y el *hojalatero* tienen igualmente necesidad de conocer la resolucion de este problema. Por ejemplo, en la construccion de las estufas, y de muchas calderas que se emplean en las fábricas, hay que ajustar exactamente el cañon con la parte de arriba ó la de abajo de la caldera, para lo cual es menester cortar y contornear una superficie evolvible, que pase á la vez por una base inferior ABCD, fig. 32, de cierta figura, y por una base superior *abcd*, que tenga la forma circular del cañon. Para esto es necesario conocer exactamente el contorno que se debe dar á la chapa ó sistema de chapas metálicas planas, que dobladas segun convenga han de formar una superficie evolvible, que pase á la vez por ABCD, *abcd*. Daremos la solucion de este problema en la leccion décimacuarta, que trata *de las tangencias*.

En lugar de cubrir las superficies con chapas pequeñas evolvibles, como en la fig. 31, se prefiere varias veces cubrirlas con fajas largas evolvibles.

En los tiempos en que los guerreros gastaban corazas, el mayor número de las piezas con que cubrian su cuerpo y sus miembros, eran superficies evolvibles; y por lo comun eran un conjunto de fajas cónicas ó cilíndricas, fácilmente fabricadas, con chapas metálicas, á las que se les daba cierta curvatura. Eran muy pocas las piezas á que habia que dar dos curvaturas, como el casco; y aun en este caso se valian casi siempre de superficies evolvibles como el morrion.

La construccion de las naves nos ofrece una aplicacion muy bella de las superficies evolvibles, dispuestas por fajas.

* Cuando un navío está ya con todos sus miembros ó cuadernas presenta una especie de esqueleto MNOPQ, fig. 33, compuesto de piezas de madera ó cuadernas. Estas cuadernas 1.1, 2.2, 3.3...., que se elevan en planos verticales, dejan entre sí espacios vacíos, (*xyz*, fig. 35, representa la elevacion ó la vertical de una cuaderna del medio.) Para acabar de formar la carena, figurada de este modo, se toman tablas bien labradas de cierto grueso, y cortadas con el contorno que deben tener. Se asientan al haz sobre la cara esterior de las cuadernas: despues se doblan libremente, para que formen superficies evolvibles, que se llaman tablas de forro, ajustándose bien por los lados y por los estremos de las que estan contíguas. La geometría suministra un medio riguroso de cortar estas piezas. *

* Supongamos que se hayan puesto los entablados desde abajo hasta ABCD, y que se quiere poner el entablado inmediatamente superior, comprendido entre las líneas ABCD, *abcd*. Por dos puntos *x*, *y*, situados entre ABCD, *abcd*, se supone bien tirante un cordel que se aplica sobre las cuadernas. Supongamos que el entablado está efectivamente ejecutado y asentado, y que el dicho cordel quede pegado á la superficie del entablado. *Desenvolvamos, esto es,* estendamos este entablado. El cordel señalaba en la superficie de la carena la línea mas corta entre los puntos *x*, *y*: este cordel señalará, como antes, la línea mas corta que se puede tirar entre sus estremos sobre la superficie evolvible desenvuelta, esto es, sobre el plano. Y como la línea mas corta que se puede tirar sobre el plano es la línea recta, se sigue que el cordel *x y* estará en línea recta, *fig.* 33 *doble*, si en el entablado conserva la posicion que en la carena del navío la hacía la línea mas corta entre *x* é *y*. *

* Cuando se tiende el cordel sobre la carena se señalan en su longitud varios puntos 1. 2. 3....; y por ellos perpendicularmente á la direccion del cordel se pasan unas especies de cuñas, puestas perpendicular-

mente á la direccion del cordel, las cuales vienen á dar por una punta en el contorno ABCDE...., y por la otra en el contorno *abcde....*, entre los cuales ha de aplicarse exactamente el nuevo entablado. *

* Ahora se pone recto el cordel *x y*; y teniéndole tirante sobre la tabla GHKL, fig. 33 doble, de manera que las cuñas pequeñitas I 1 *I*, II 2 *II*, III 3 *III*, IV 4 *IV*...., sean perpendiculares al cordel, se trazan los polígonos I . II . III . IV....; *I . II . III . IV*...., de los cuales se forman dos curvas contínuas, que representan exactamente el límite inferior y superior del contorno longitudinal del entablado.

* No basta tener estos contornos, sino que es menester conocer en cada punto I, II, III, IV...., *I*, *II*, *III*, *IV*...., el ángulo que el entablado que se va á poner forma con la carena, para que su junta con el entablado contigua sea exacta. Hácese esto poniendo una pierna de la escuadra falsa en la direccion de cada cuña, y la otra en la de la cara de junta del entablado que ya está asentado, perpendicularmente á la arista de este entablado que toca á la carena. No falta mas que trasladar estos ángulos respectivamente á I. II. III. IV...., *I. II. III. IV*...., cuando se labra la tabla GHKL con la azuela. *

* Para evitar toda confusion, á medida que el carpintero valiéndose de la escuadra falsa, toma el ángulo que forma la junta del nuevo entablado en I. II. III. IV...., con el otro contíguo, que está ya colocado, pone un lado de la escuadra falsa junto á una tableta NP, fig. 33, *triple*, y traza una línea recta por el otro lado *sr*. Como todas estas líneas están en el mismo orden en que se hallan colocadas las 1. 2. 3. 4...., que corresponden á los puntos I. II. III. IV...., es fácil que el carpintero vea como ha de poner la escuadra en cada punto I. II. III. IV...., para labrar el lado pequeño ó canto del entablado, dándole la inclinacion conveniente respecto de las caras mayores. *

Es esencial observar que el método aquí descri-

to no supone la superficie de la carena de ninguna figura particular, y por consecuencia puede aplicarse no solamente á la construccion de buques, sino tambien á cualquiera otra especie de construcciones civiles ó militares. Este es uno de los ejemplos mas patentes de las ventajas que presenta la aplicacion á las artes de las propiedades que la geometría descubre en las superficies.

Modelos y patrones evolvibles. En muchas artes, cuando se trata de ejecutar superficies terminadas por ciertas líneas, se descomponen dichas superficies en partes que se puedan considerar casi como evolvibles. Se toma su figura por medio de modelos ó patrones de papel ó carton que producen verdaderas superficies evolvibles por su flexìon natural, sin roturas ni dobleces. Tales son los patrones que los *sastres y modistas* emplean para determinar la forma y el corte de los tejidos que sirven para los vestidos de hombres y mugeres.

Aplicacion al corte de las telas para los vestidos. Una aplicacion muy útil de la geometría es el combinar el corte de las diferentes piezas de un vestido, de manera que se desperdicie en esta operacion la menos tela posible. Aunque no se emplea para resolver este problema ni la regla (1) ni el compás, no se ha de creer por esto que la inteligencia del sastre ó de la modista no haga una operacion matemática y muy complicada, que exige á la vez exactitud en la vista y combinacion en el entendimiento, y mucha esperiencia en la comparacion de las formas humanas, y de las for-

(1) *En lugar de una regla el sastre emplea una* medida *flexible que es una* superficie evolvible *dividida en partes iguales. Esta superficie evolvible aplicada sobre el contorno del cuerpo y de los miembros, hace conocer las dimensiones que, trasladadas á una tela plana,* desenvolviendo *la medida, dan los puntos por donde el sastre lleva las líneas de su trazado.*

mas que convienen á las superficies evolvibles de que se hacen los vestidos.

Independientemente de la cuestion de economía, las cuestiones de conveniencia, de gracia y de elegancia en el adorno de los hombres y mugeres, tienen principios que pertenecen en muchos puntos á las reglas de geometría y mecánica.

Sería necesario reproducir, con motivo de los vestidos, las consideraciones que hemos presentado hablando de las tapicerías y colgaduras acerca de las superficies evolvibles susceptibles de alargarse y acortarse en ciertas partes, lo que constituye su flexibilidad y elasticidad. Como semejantes telas tienen la propiedad de acomodarse mejor á las formas humanas, reales ó supuestas, son las mas propias para adquirir exactamente el aspecto que exija la moda, y las que, para servirme de los términos del arte *visten mejor*.

Si las telas juntan á la cualidad de ser elásticas la de tener una gran flexibilidad y mucha ligereza, pueden tomar las inflexiones y pliegues mas numerosos, mas variados y mas sujetos á las reglas del gusto. En lugar de conservar una rigidez, una inmobilidad geométricas, las telas muy flexibles y muy finas en los ropages pueden ceder suavemente al impulso mas leve y tomar un aspecto ondulante que recuerda en algun modo la agitacion y la gracia de la vida. Tales parecen haber sido los tejidos que servian de modelo á los artistas de la antigüedad para los ropages elegantes con que han vestido algunas estatuas, y tales son en el dia los tejidos de muselina y de cachemira.

Para que un vestido sea perfecto es necesario que las superficies de que se compone dejen á nuestro cuerpo y á nuestros miembros libertad y facilidad en los movimientos, lo que exije una cierta amplitud, una cierta ligereza, un cierto corte segun convenga á las diversas partes. Pero como los hombres han apropiado la gravedad, la importancia, la dignidad, á la lentitud de los movimientos, es necesario que las personas que

por sus funciones deben mostrar este decoro, tengan unos trages que parezca no convienen mas que á tales movimientos. La capa pluvial del pontífice, la toga del senador, el manto de los reyes, deberán cortarse con ámplias dimensiones, con tejidos poco flexibles que formen superficies evolvibles de anchos pliegues que la agitacion del aire no pueda hacer revolotear.

La túnica militar, el trage ligero del bailarin de teatro, los vestidos de baile, se cortan al contrario, reduciendo tanto cuanto sea posible cada dimension, y ademas eligiendo para los trajes de puro agrado, las telas mas flexibles, mas ligeras y mas ondulantes, á fin de revelar con mas gracia y fidelidad las formas humanas y sus movimientos variados.

Bajo estos aspectos, la eleccion de los tejidos, el dibujo de los ropages, deben arreglarse en virtud de las consideraciones que pertenecen á la teoría de las bellas artes, y tienen conexion con la organizacion de la sociedad. Bajo los puntos de vista de comodidad, de bienestar y de salubridad, pertenecen á los intereses mas positivos del estado social. Finalmente, bajo el punto de vista de la industria, la mecánica y la geometría deben dar la medida de las formas y de las cualidades de estos productos, y los medios de fabricacion de corte y de postura que convenga mas para producir por la flexion y el enlace de superficies, primitivamente planas, la variedad de formas adecuadas que ofrecen los vestidos y ropages en un pueblo donde las bellas artes ejercen generalmente su agradable influencia.

Volveremos á hablar de las superficies evolvibles para enseñar nuevas aplicaciones, no menos importantes que las precedentes, luego que hayamos esplicado los principios de las intersecciones y las tangencias. Ahora es preciso pasar á las superficies gauchas.

Superficies gauchas. Llámanse así las superficies engendradas por líneas rectas consecutivas, que no se pueden considerar como formando un conjunto de pequeñísimas facetas planas.

Para dar una idea de estas facetas gauchas, imaginemos una escalera, fig. 36 y 37, cuyos dos lados no esten en un mismo plano. Pongamos en el suelo esta escalera, de manera que sus dos lados tengan una direccion horizontal, pero que no se hallen en un mismo plano vertical. La fig. 36 representa la proyeccion vertical, y la fig. 37 representa la proyeccion horizontal. Los lados AB, CD, fig. 36, se cruzan en un punto 4 IV. Si tiramos una vertical por este punto, pasará, fig. 37, por el punto 4 sobre CD y por el punto IV sobre AB. Ahora, desde 4 y IV dividamos los dos largueros AB, CD en partes iguales por los puntos **1**, 2, 3, 4, 5, 6, 7...., I, II, III, IV, V, VI, VII....; y tiremos las rectas **1** I, 2 II, 3 III, 4 IV, 5 V, &c.; y habremos formado una *escalera gaucha.*

Las alas de los molinos de viento son escaleras de este género, compuestas de largos lados divergentes, y de palos perpendiculares al uno de estos lados. Las escaleras de caracol, aunque les falta un lado, son tambien gauchas.

Las superficies gauchas pueden considerarse como compuestas de facetas gauchas muy estrechas, análogas á la escalera que acabamos de describir. Los lados que terminan estas facetas gauchas tienen el nombre de *aristas.*

Aplicacion á la construccion de las naves. Para forrar la carena de los navíos se forman superficies evolvibles que se cortan en tablas ó tablones planos, segun queda esplicado, fig. 33. Para ciertas partes muy curvas del navío, hácia la popa y hácia la proa, no se podrian sacar de las tablas mas anchas sino unos forros muy cortos, que no podrian conservar exactamente el trazado que conviene á las superficies evolvibles. En el trazado del forro ó entablado representado, fig. 39, se ve que seria necesario perder mucha madera para sacar de un rectángulo el trazado curvilíneo **1**, 2, 3, 4, 5, 6, 7, VII, VI, V, IV, III, II, I. Supongamos ahora que se dá una curvatura ligera y re-

gular al cordel *abcdefg*, fig. 38; y entonces se consigue un trazado que se puede poner completamente sobre un entablado mucho menos ancho que empleando el trazado de la fig. 39.

Pero cuando se quiera doblar un entablado cortado, como en la fig. 38, no ocupará ya exactamente el lugar á que está destinado sobre la carena del navío, en cuyo caso será necesario valerse de medios mecánicos para forrarle ó adquirir esta posicion, lo que transformará casi siempre la superficie evolvible en superficie gaucha.

En las partes del navío, donde la curvatura de la carena es muy considerable, no se pueden ya emplear entablados doblados sin esponerse á que se rompan por la flexîon misma. Opérase del modo siguiente.

* *Trabajo de las piezas combas.* Supóngase que se trata de ejecutar una pieza que tiene este nombre, á causa de su grande curvatura, y que se aplica debajo del contorno ABC, fig. 40, sobre las cuadernas del navío. Tendráse fija una regla, que representa una línea recta ED, por la cual se concibe un plano, que señalará sobre las cuadernas tres puntos *m*, *n*, *o*, de ABC (**1**). *

* Por estos puntos tírense las rectas *m***1**, *n*2, *o*3...., perpendiculares á ED, y mídase la longitud de ellas. Esto hecho, tómese la falsa escuadra y póngase desde luego una pierna sobre *m***1**, y la otra á lo largo de la superficie de la carena, quedando las dos piernas de la escuadra en un plano perpendicular á ED*mno.* Hágase la misma operacion con los otros puntos *n*, *o*.... de la curva *mno*.... El conjunto de las posiciones de

(1) *Supónese aqui que en la corta estension de una pieza comba el contorno ABC no tiene mas que una simple curvatura. Si entre* m, n, o, *hubiera puntos demasiado distantes de la curva plana* mno, *se dividirán estas distancias en puntos determinados, lo que seria una operacion mas.*

la segunda pierna de la falsa escuadra formará una *superficie gaucha*, que será la cara interior de la pieza de madera que hay que trabajar. La cara esterior se trabajará haciendo otra superficie gaucha, que en toda su estension esté á una misma distancia de la primera, á fin de que la pieza de madera tenga un mismo grueso. En cuanto á la cara estrecha que ha de asentar sobre ABC, se recurrirá de nuevo á la falsa escuadra; se verá el ángulo que la segunda pierna, puesta sucesivamente en *m*, *n*, *o*, contra la superficie de la carena, forma con la cara de junta del entablado ABC ya puesto. Esto hecho no habrá mas que hacer que trasladar estas escuadras á la posicion que las conviene.

Cuando se quiere construir un navío se labran lo primero, segun lo hemos dicho, unas piezas de madera que se traban y se asientan en planos verticales paralelos, fig. 41. Despues se sujetan provisionalmente dichos maderos con unos reglones ó listones fuertes. Estos estan á lo largo de los dos lados ó bordos de la carena. Las curvas que tienen son planas, y trazadas de antemano en parage conveniente. Respecto á las partes del navío, que son poco curvas en el sentido longitudinal, se contentan con trabajar largos prismas cuadrangulares ó listones escuadrados del modo conveniente, doblándolos de manera que toquen á los puntos indicados sobre el contorno de las diferentes cuadernas. Si la corta porcion de carena que ocupa la cara del reglon que se aplica sobre esta carena es exactamente evolvible en faja rectilínea, el reglon se dobla sin dificultad en toda su latitud y longitud contra esta carena. Si la pequeña porcion de carena cubierta por la cara del reglon que debe estar en contacto con ella es una superficie gaucha, entonces el contacto perfecto no se verifica; y son necesarios grandes esfuerzos para hacer que el reglon se aplique exactamente á las cuadernas, formando el contorno dado por el trazado del ingeniero.

En las partes muy curvas de la carena no se puede ya emplear este medio, pero se recurre al siguiente:

*ABC, fig. 41, forma parte del plano del reglon; se señala este plano con dos cordeles, el uno que se clava en la carena á lo largo de ABC, y el otro DE que se tiene á alguna distancia fuera de la carena. Mídese con la escuadra falsa el ángulo que forman este plano y la superficie de la carena en cada punto A, B, C, sobre las diferentes cuadernas. Puesto luego el patron ó plantilla de la curva ABC sobre la pieza de madera, fig. 42, en la cual se trata de cortar el reglon, se traza ABC, y se corta la pieza frente por frente de los puntos A, B, C, formando unas muescas donde entre la escuadra falsa y dé los ángulos tomados en el navío. Se quita luego la madera que hay entre las muescas, de manera que quede una superficie evolvible ó *gaucha*. En lo interior de esta superficie se señalan los puntos *a*, *b*, *c*, igualmente distantes de ABC; y luego los puntos *a'*, *b'*, *c'* que disten de *abc* el ancho del reglon. De esta manera se tiene la primera cara *abcc'b'a'* que se aplicará sobre las cuadernas. Se corta la cara superior y la cara inferior á escuadra con *abcc'b'a'*; se dá á estas dos caras un ancho igual por todas partes; y por último, se corta la cuarta cara á escuadra con la tercera y la cuarta. El trabajo de esta pieza, y lo demas de ella, será muy claro y fácil, esplicándolo con un modelo delante en las ciudades marítimas. En las demas ciudades podrá omitirse esto, si pareciere que no es fácil entenderlo.*

La arquitectura civil hace igualmente uso de las superficies gauchas para las dovelas de ciertas bóvedas, y de algunas *escaleras*.

Sabido es que los escalones de las escaleras han de ser planos y horizontales en la parte en que sienta el pie la persona que sube ó baja. El contorno de ellas está representado, fig. 43, por ABCFE, DEFGH...., en donde se ven las juntas BC, EF, GH...., con cuyo auxilio cada escalon descansa sobre el que está inmediatamente inferior, y sostiene al que está inmediatamente superior. En la escalera de escalones paralelos las juntas

BC, EF, GH...., son todas paralelas entre sí, los escalones son planos, y tienen la figura de paralelógramos.

Pero cuando la escalera sigue una direccion curvilínea, como en las escaleras circulares y de caracol, el problema de los enlaces de los escalones es mucho mas complicado. Claramente se ve, fig. 44, que los escalones no tienen el mismo ancho en cada uno de sus puntos; sino que son mas estrechos hácia lo interior ó el alma O de la escalera, y van siendo mas anchos hácia lo esterior. Por consecuencia, la pendiente de la escalera, medida por la línea inferior GFC, fig. 43, es tanto mas suave cuanto mas se aleja del eje de la escalera. Luego la junta EF de los escalones, la cual es en toda su estension perpendicular á GFC, se acerca á la horizontal cuando se va hácia lo esterior de la escalera; y se acerca á la vertical cuando se va hácia el eje de la escalera.

Las perpendiculares EF, á la arista entrante E, presentan pues una escalera gaucha, comparable á la de las figuras 36 y 37. Luego la junta EF de dos escalones consecutivos es *una superficie gaucha.* Cuando se hayan cortado todas las caras planas de un escalon, segun las reglas de la mas sencilla geometría, no quedará mas que trazar la cara de junta EF.

* Para esto se dividirá la longitud de cada escalon en partes iguales. Por los puntos de division **1**, 2, 3...., señalados en la arista entrante OE, fig. 44, se tirarán las rectas **1**.**1**, 2.2, 3.3...., perpendiculares á dicha arista, y que vengan á tocar á la arista entrante inmediatamente superior OB *

* La fig. 45 representa en grande la elevacion del escalon OEB, visto perpendicularmente á OE. En ella E**1**, E2, E3.... representan **1**.**1**, 2.2, 3.3.... de la fig. 44. *

* Si en la fig. 45 se tiran EI, EII, EIII...., perpendiculares á E**1**, E2, E3...., estas líneas representarán la direccion de la cara de junta de los dos escalones que se tocan en OE, y corresponden á los puntos **1**, 2, 3....

Bastará pues tomar con la falsa escuadra los ángulos AEI, AEII, AEIII...., para tener la inclinacion de la cara de junta EF, fig. 43, de los escalones contíguos en cada uno de los puntos **1**, 2, 3.... *

Toda esta construccion será fácil de entender si los profesores la esplican con un modelo de madera ó de yeso.

Las escaleras consideradas como superficie contínua, á lo menos en cuanto á su superficie inferior, pertenecen á las *superficies espirales*, que son de un grande interés para las artes. (Véase la leccion duodécima).

LECCION UNDÉCIMA.

Superficies de revolucion.

Despues de las superficies planas, *las superficies de revolucion* son las mas fáciles de construir y las que se emplean con mas frecuencia en las artes. Sus propiedades tienen uso contínuo en la mecánica, y los fenómenos de la naturaleza las reproducen sin cesar á nuestros ojos.

Si se concibe una curva cualquiera ABC, fig. 1, y que esta gire alrededor de un eje AC, la superficie que engendra es una superficie de revolucion. El movimiento que se imprime á la curva se llama *movimiento circular* ó de *rotacion*, y cuando esta rotacion es completa, esto es, de 360 grados, se llama *una revolucion*.

En este movimiento cada punto B, B′, B″...., describe un círculo. Todos estos círculos tienen sus planos B*b*, B′*b*, B″*b*″, paralelos entre sí y perpendiculares al eje AC en el cual estan situados todos sus centros O, O′, O″.... Hemos demostrado en la leccion sesta estas diversas propiedades.

* No es necesario que la curva ABB′B″C sea plana para que produzca una superficie de revolucion cuando gira alrededor de AC. Si de cada punto B, B′, B″.... de la curva se tira una perpendicular BO, B′O′, B″O″... al eje AC, estas perpendiculares no variaran ni de magnitud ni de distancia refiriéndolas á un mismo plano, en cuyo caso sus estremidades B, B′, B″.... formarán una *curva plana* que girando alrededor del eje engendrará la misma superficie de revolucion que la curva propuesta. *

La curva *plana* que produce la superficie de revolucion girando alrededor del eje AC es lo que se llama

el meridiano de esta superficie. Los círculos B*b*, B′*b*′, B″*b*″.... cuyos planos perpendiculares al eje son paralelos entre sí, se llaman por esta razon los *círculos paralelos* ó solamente los *paralelos*.

Tantas cuantas son las figuras diferentes que se pueden formar con líneas rectas, círculos y otras curvas, otros tantos son los géneros diferentes de superficies de revolucion que pueden formarse. Estos géneros se dividen en especies muy distintas segun la posicion del eje respecto de la línea generatriz. Vamos á examinar sucesivamente las superficies de revolucion mas sencillas y mas importantes para la industria.

Superficies de revolucion engendradas con el movimiento de una línea recta.

Si esta línea es perpendicular al eje y gira alrededor de este, describe un plano. En la leccion sesta esplicamos los diversos medios que esta propiedad suministra á las artes para ejecutar las superficies planas.

Si la línea generatriz es paralela al eje OO, fig. 2, describe un *cilindro circular* cuyas propiedades y aplicaciones á la industria esplicamos en la leccion octava.

Si la línea generatriz pasa por un punto del eje OO, y es oblícua respecto de éste, describe un *cono*, fig. 3, cuyas propiedades y aplicaciones á la industria esplicamos en la leccion novena.

Cuando la recta generatriz no es paralela al eje, y está relativamente á este en la posicion de un lado de escalera gaucha, relativamente al otro lado, esta recta describe una superficie de revolucion, fig. 4, cuyas dos curvaturas estan dirigidas en sentidos contrarios.

* Cuando una recta AB no pasa por el eje OO, se puede concebir otra *ab* simétricamente situada respecto del plano OO*o* que pasa por este eje. Las dos rectas se cortan necesariamente en un punto P situado en el plano de simetría. Si se hacen girar con movimiento igual las dos rectas AB, *ab*, alrededor del eje, acercándose ó alejándose igualmente del plano OO*o*, este será siempre su plano de simetría, y se cortarán siempre en

un punto situado sobre este plano. Hagamos girar alrededor del eje el plano de simetría y las rectas AB *ab*. Como las dos rectas estan dispuestas de manera que siempre se corten sobre el plano OO*o*, la continuacion de sus intersecciones forma una curva que es el meridiano de una superficie de revolucion engendrada por las dos rectas AB *ab*. Luego estas dos rectas girando alrededor de OO, engendran la misma superficie. La figura 4, representa los dos sistemas de líneas rectas que forman la superficie. Los alumnos entenderán perfectamente estos dos sistemas si los profesores les presentan un modelo con dos círculos de carton unidos por un eje, y unos hilos igualmente oblícuos dirigidos en dos sentidos opuestos.

Tenazas. Mr. Ferry examinador que fue de la escuela Polytécnica, ha hecho unas tenazas con los cortes rectilíneos; el uno fijo AB, fig. 4, y el otro *ab* gira alrededor de un eje OO. Este último cuando se mueve queda siempre en contacto con el primero, y corta los cuerpos puestos en contacto entre los dos.

Devanaderas. Las hay formadas con varitas AB, *ab*, fig. 4, que giran alrededor del eje OO. El hilo envuelto sobre la garganta de la superficie no puede caerse. Se saca la madeja formada alrededor de esta garganta acercando al eje todas las varitas por medio de un mecanismo sencillo.

De la Esfera. Para formar esta superficie basta hacer girar un círculo AMBN, fig. 5, alrededor de uno de sus diámetros AB. Como todos los puntos de la circunferencia del círculo meridiano AMBN estan á la misma distancia del centro O, no dejarán de estar á la misma distancia de este punto cuando se haga girar el círculo meridiano alrededor del eje AOB. Luego todos los puntos de la superficie de la esfera estan igualmente distantes de un punto O que es *el centro de la esfera*.

Todo punto tomado en el plano del meridiano AMBN, dentro ó fuera de este meridiano, está mas cerca ó mas léjos del centro O que los puntos de la circunferencia AMBN. Luego todo punto del espacio que se halle en el plano de cualquier meridiano estará mas distante del centro de la esfera si está fuera del meridiano, y mas cerca si esta dentro.

Así, no solamente todos los puntos de la superficie de la esfera estan á la misma distancia del centro, sino que tambien ningun otro punto está á la misma distancia de este centro.

Todo plano que pasa por el centro de una esfera la corta formando una curva, cuyos puntos todos estan distantes del centro una cantidad igual al rádio de la esfera. Esta curva es un círculo. Si se hacen girar estos diferentes círculos sobre cada uno de sus diámetros se producirán esferas que tendrán todas un mismo centro y rádio, esto es, que no se producirá mas que una misma esfera.

Toda cuerda *mn* de un círculo AMBN, fig. 5, es menor que el diámetro MN, y tanto menor cuanto mayor sea la distancia á que está del centro de la esfera. Pero cuando el círculo gira alrededor de un eje AOB, perpendicular á la cuerda *mn*, la semicuerda *om* describe un plano, y su estremo traza una circunferencia que está toda en la esfera. Luego: 1.° Toda seccion *mn* hecha con un plano en la esfera es un círculo; 2.° Todos estos círculos son menores que aquellos cuyo centro es el centro de la esfera, y que se llaman por esta razon los *círculos máximos* de la esfera; 3.° Los *círculos menores* son tanto menores cuanto su centro está mas distante del centro de la esfera.

Medios de describir la esfera.

* Podemos, fig. 6, fijar en el eje AB de un torno el cuerpo que se trata de cortar en forma de esfera: despues á cierta distancia de este eje fijaremos el semicírculo *a*T*b*, cuyo diámetro *ab*=AB es paralelo á él. Con una herramienta cortante que salga tanto como TM igual á la distancia que hay entre *ab* y AB, y llevando

esta herramienta *paralelamente* á lo largo de aTb, su punta M describirá el círculo meridiano AMB. Luego haciendo andar al torno, este meridiano describirá la esfera. *

* Se puede poner la herramienta cortante de tal manera que su pie T, fig. 7, vaya por un círculo aTb, que tenga por centro el centro del círculo meridiano, y esté siempre dirigida hácia el centro O de los dos círculos AMB, aTb. Es evidente que siendo TM, tm la diferencia de los radios de los dos círculos, cuando T corre el círculo aTb, el punto M siempre estará en el círculo meridiano; y resultará que la herramienta cortante siempre permanecerá en la superficie de la esfera. *

Se hacen tambien esferas con *moldes*. De esta manera se fabrican las balas de cañon, que son esferas mazizas. Para fabricar las *bombas* y los *obuses*, que son esferas huecas, es necesario hacer un molde que tenga la forma que se vé en la fig. 8, y que presente dos esferas, la una maziza A, y la otra hueca BBB, y despues fundir entre ellas la bomba ó el obús. Se vé que la exactitud de la operacion depende de muchas circunstancias: **1.°** Las dos partes A y BBB han de tener una figura perfectamente esférica; y 2.° sus centros deben estar situados en un mismo punto. Cuando estas condiciones no se cumplen el tiro no puede tener exactitud.

En el círculo $AmBm'$, fig. 9, tiremos la cuerda mm', y el radio OoA, perpendicular á esta cuerda. Haciendo girar la fig. AmO alrededor del eje AOB: **1.°** el arco de círculo Am engendra el *casco esférico*; **2.°** el segmento de círculo mAm' engendra el *segmento esférico*; y **3.°** el sector de un círculo $OmAm'$ engendra el *sector esférico*.

Es necesario resolver varios problemas que son de uso muy frecuente en las artes.

¿Cuál es la superficie del casco esférico mAm', fig. 9, y de la esfera entera? ¿Cuál es el *volúmen* de

un segmento de esfera, de un sector de esfera, y de la esfera entera?

*Para determinar la superficie del casco mAm', fig. 9, supongamos que se sustituya al casco mAm' del círculo meridiano de la esfera un polígono de un crecidísimo número de lados mn, np.... Hagamos girar este polígono alrededor del eje AOB del casco. Cada porcion de línea recta mn, np...., formará un tronco de cono, cuyo eje será AOB. La superficie total de estos troncos de conos se diferenciará tanto menos de la superficie del casco esférico mAm', cuanto mas lados tenga el polígono $mnpAp'n'm'$. Luego la superficie de un tronco de cono recto $mm'n'n$, es igual á la suma de la circunferencia de las dos bases, multiplicada por la mitad de la arista mn. Así....

Superficie del tronco de cono
$mm'n'n = (\text{circunf. } mm' + \text{circ. } nn')\ \frac{1}{2}\ mn.$
Superficie del tronco de cono
$nn'p'p = (\text{circunf. } nn' + \text{circ. } pp')\ \frac{1}{2}\ np.$
y asi en adelante.

Si tiramos nh paralela al eje, el triángulo rectángulo mnh es semejante al triángulo rectángulo Oig, formado por Oi perpendicular á la cuerda mn, por ig perpendicular al eje AO, y por consecuencia á nh, y por Og perpendicular á mh.

Los dos triángulos son pues semejantes, y se tiene $nh : nm :: ig : iO ::$ circunf. que tiene ig por rádio ó ii' por diámetro, es á circunf. que tiene iO por rádio ú AB por diámetro, en el supuesto de que el número de los lados del polígono sea tan grande que no haya diferencia asignable entre Oi y $Om = OA$, rádio de la esfera. *

Luego $mn \times \text{circunf. } ii' = nh \times \text{circunf. AB}$,
Pero.... $ii' = \frac{1}{2}(mm' + nn')$; luego
$mn \times \frac{1}{2}(\text{circunf. } mm' + \text{circunf. } nn') = nh \times \text{circunf. AB}.$

El primer término de esta igualdad es la superficie del tronco de cono $mm'nn'$, y el segundo es la circunferencia del círculo meridiano, multiplicada por nh, altura del tronco de cono.

Luego cuando el polígono $mnp....$ está formado de un grande número de lados sumamente pequeños, la superficie que engendra es igual á la circunferencia meridiana de la esfera, multiplicada por la suma de las alturas nh, $ph'....$, de los troncos de cono engendrados por la rotacion de los lados del polígono. Luego;

I. *La superficie de un casco esférico* m*A*m' *es igual á la circunferencia del círculo máximo de la esfera, multiplicada por la ságita A*o *del casco.*

II. *La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de su círculo máximo, multiplicada por el diámetro del mismo círculo máximo.* *

Pero la superficie de un círculo máxîmo AmBm', es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del rádio ó el *cuarto* del diámetro. Luego *la superficie de la esfera es igual á cuatro veces la de su círculo máximo ó círculo meridiano.*

Si se sabe que para cubrir en toda su estension igualmente un círculo AmBm'A, fig. 9, es necesario tal peso ú tal superficie de pintura, ó de hojas ó chapas de plomo, de cobre, de hierro, &c., se inferirá que con *cuatro veces* este peso de pintura ó de esta superficie de hojas metálicas se cubrirá la esfera entera, que tenga este círculo por meridiano; y que con dos veces este peso ú esta superficie se cubrirá la bóveda ó hemisferio que tenga el mismo círculo por base.

Medida del volúmen de la esfera y de las porciones de esfera. Considerando la superficie de la esfera como compuesta de un gran número de caras muy pequeñas, se podrá considerar cada una de ellas como un plano que sea la base de una pirámide que tenga su vértice en el centro de la esfera. La reunion de estas pirámides será el volúmen de la esfera. Pero el volúmen de cada pirámide es igual á la superficie de su base, multiplicada por el tercio de su altura, que aquí es el tercio del rádio. Luego el volúmen entero de la esfera es igual á la suma de todas las caras pequeñas que se han sustituido á su superficie, multiplicada por el tercio de su rádio. Así.... *la esfera tiene por medida de su volúmen su superficie multiplicada por el tercio de su rádio, ó cuatro veces la superficie de su círculo máximo, multiplicada por el tercio de su rádio.*

Se verá del mismo modo que el *volúmen de un sector de esfera* Om*A*m'O, fig. 9, *es igual al producto de la superficie del casco* m*A*m', *por el tercio del rádio de la esfera.*

Si de este producto se resta el volúmen del cono mOm'; se tiene el volúmen *del segmento esférico* $mAm' = \frac{1}{3}$ circ. AmBm' $\times$ Ao $\times$ Ao $-$ $\frac{1}{6}$ circunf. mm' $\times$ Oo $\times$ mo.

El método que sirve para calcular la superficie de la esfera suministra un medio de construir esta superficie, del cual hacen las artes frecuente uso. Supongamos que hay que cubrir una bóveda esférica con hojas planas de metal ó cualquiera otra materia. Se divide la bóveda con planos paralelos, en zonas ó fajas circulares $mmn'n'$, $nn'p'p$, &c., fig. 9, que se suponen cónicas, y por consecuencia evolvibles. Véase aquí cómo se traza el tronco de cono $mm'n'n$, supuesto desenvuelta.

Prolonguemos mn, $m'n'$, fig. 9, hasta su punto de encuentro s, vértice del cono de que es parte el tronco $mm'n'n$. Si desenvolvemos el cono todos los puntos de cada base mm', nn', los cuales estan igualmente distantes del vértice s, fig. 9, se desenvolverán formando dos arcos de círculo MM', NN', (fig. 9 duplicada) que tienen un mismo centro S.

*Se tendrá, fig. 9 y 9, circ. mm'= arco MKM', y circ. nn'= arc. NLN'. Busquemos el valor del ángulo MSM'. El arco MKM' es igual á la circunferencia, cuyo rádio es mo. Pero esta circunferencia es á la que tiene SM por rádio : : mo : SM. Luego la circunferencia que tiene mo por rádio = MKM' = la circ. que tie-

ne SM por radio $\times\frac{mo}{SM}$. Así, el arco MKM′ representa $\frac{mo}{SM}\times 360°$. de la circunferencia que tiene SM por radio. Bastará efectuar una multiplicacion y una division para tener el número de grados del ángulo MSM′, y por consecuencia este ángulo, una vez determinado con SM$=sm$ y SN$=sn$ como radios, se trazarán los dos arcos MKM′ y NLN′, fig. 9, y se tendrá la zona MKM′N′LN, que doblada naturalmente, juntando los dos estremos MN, M′N′, producirá el tronco de cono $mm'n'n$, fig. 9.*

Los hojalateros y cartoneros ejecutan varias veces con hojas de carton ó metal, cortadas en fajas circulares, despues soldadas ó encoladas, superficies que se diferencian tanto menos de la esfera, cuanto las fajas son mas estrechas y mas multiplicadas. El método precedente les será muy útil, y no pocas veces servirá á los arquitectos, carpinteros, &c.

Despues de haber esplicado los medios de ejecutar una superficie esférica *con los conos*, vamos á dar el medio de ejecutarlo *con los cilindros*.

Supongamos que pasan por el eje AOB de una esfera, fig. 10, un gran número de planos meridianos, de manera que dividan el espacio alrededor de este eje en ángulos planos muy pequeños. Concibamos además varios planos perpendiculares al eje de la esfera, y por consecuencia paralelos entre sí: 1.° cortarán la esfera en varios círculos paralelos; y 2.° cortarán los círculos meridianos en varios puntos igualmente distantes en estos círculos. Estos puntos serán los vértices de polígonos regulares, semejantes, y cuyos lados correspondientes serán paralelos. Todos los lados paralelos de una direccion dada formarán un cilindro, cuyas aristas pasarán á la vez por dos círculos meridianos consecutivos. Con esto se tendrán varias fajas cilíndricas, semejantes en su contorno á las que tiene un melon, y cuanto mas se multipliquen estos lados tanto mas se acercará á la esfera la superficie producida de esta manera.

Aplicaciones. De esta manera para formar esferas ó porciones de esfera se juntan tales segmentos cilíndricos hechos de seda engomada, de piel, carton, seda pura, gasa papel &c., y así se hacen los globos aërostáticos, los balones llenos de aire, y las pelotas que sirven para estos juegos, los globos terrestres ó celestes destinados al estudio de la geografia y astronomía, los quitasoles y paraguas, las pantallas en hemisferio para los velones. En los quitasoles, los paraguas y las pantallas, la direccion de los meridianos está señalada con ballenas ó hilos de hierro.

Veámos cual es la figura que se ha de dar á los lados cilíndricos para que juntándolos formen una superficie cuyas juntas ó costuras sean meridianos de una misma esfera.

* Los anchos mm'=MM′, nn'=NN′, de un segmento son proporcionales á los rádios OM, ON de los círculos paralelos, á causa de los triángulos semejantes OMM′, ONN.′ Luego siendo OM, ON los rádios de los círculos paralelos que corresponden á mm' y nn', se tendrá OM : ON : : MM′ : NN′ : : mm' : nn'. Se conocerán pues fácilmente los anchos que corresponden á los diferentes puntos de cada segmento; y por consecuencia la figura misma de dichos segmentos. *

Aplicaciones á la geografia y astronomía. Estas dos han hecho un uso muy importante de las propiedades de la esfera.

La figura de la tierra es una superficie de revolucion que es muy poco lo que se diferencia de la esfera.

Han pasado muchos siglos antes que los pueblos llegasen á suponer que la tierra era redonda, que era lo que se llama *un globo*, y que tenia la figura de una esfera. Ha sido menester los progresos simultáneos de la geometría y de la mecánica para enseñar á los astró-

nomos que la tierra está achatada en una direccion y elevada en la direccion perpendicular.

Cuando los geógrafos suponian que la superficie de la tierra era esférica, véase aquí como dividieron dicha superficie.

Dieron el nombre de eje á la línea recta, alrededor de la cual les pareció que el cielo hacia una revolucion completa en veinte y cuatro horas. Llamaron *polos* de la tierra los puntos en que este eje atraviesa la superficie de la tierra; *planos meridianos* todos los que pasan por los polos; y *círculos meridianos* las líneas que estos planos trazan en la superficie de la tierra. Llamaron *paralelos* todos los círculos trazados en la superficie de la tierra, por planos *paralelos* entre sí, y perpendiculares al eje.

Considerando la tierra como una superficie de revolucion, dos paralelos estan en toda su estension á la misma distancia uno de otro, y los meridianos miden la distancia que separa las paralelas en esta superficie.

El paralelo cuyo plano pasa por el centro de la esfera es el mayor de todos. Este es el ecuador, así llamado porque divide el globo en dos partes iguales que se llaman hemisferios, que es lo mismo que decir semiesferas.

El hemisferio boreal es el que contiene al *polo boreal*; por consecuencia *la Francia está situada en el hemisferio boreal.* El hemisferio *austral* es el que contiene al polo de este mismo nombre.

Si se conciben 360 planos meridianos igualmente distantes, comprenderán ángulos de grado y dividirán á la vez cada paralelo, y el ecuador en 360 partes iguales, esto es, en 360 grados. Estos son dos *grados de longitud.* Si ahora se divide el espacio comprendido entre dos de los 360 meridianos en 60 partes iguales con nuevos planos meridianos, estos dividirán en 60 partes iguales, y por consecuencia en *minutos*, los grados de longitud, &c.

Si los paralelos estan igualmente distantes y en número de 180, dividirán los meridianos en 360 partes iguales, que son los *grados de latitud.* Los paralelos intermedios subdividen estos grados en *minutos*, *segundos*, *terceros*....

Division de la superficie de la tierra en cuadros esféricos para la descripcion de los objetos. Del mismo modo que se divide en cuadros la superficie del plano con líneas paralelas y perpendiculares, para señalar la posicion de las figuras trazadas en este plano, así tambien se divide la superficie del globo en cuadros esféricos con círculos paralelos y perpendiculares, para indicar con exactitud en esta superficie la posicion de todos los puntos, de todas las líneas notables: como el sitio de las ciudades, el curso de los rios, la direccion de las cadenas de montañas, el contorno de las costas del mar, &c. La posicion de cada punto está completamente indicada, cuando se señala el paralelo y el meridiano en que se halla dicho punto en cada hemisferio. Cuentánse los paralelos por 0°, 1°, 2°, 3°.... 90° de *latitud*, desde el cenador hasta el polo boreal por una parte, y hasta el polo austral por la otra. Cuéntanse los meridianos por 0°, 1°, 2°, 3°,.... 180° de *longitud*, empezando en el meridiano que pasa por el observatorio de Paris (1) distinguiendo los grados al oriente y los grados al occidente. A 180° de longitud nos volvemos á hallar en el círculo meridiano de Paris.

---

(1) *Los ingleses en sus mapas geográficos é hidrográficos empiezan á contar la longitud desde el meridiano que pasa por su observatorio de Greenwich cerca de Londres.*

Hay mapas en que la latitud se cuenta desde otros meridianos. Muchos hay en que el primer meridiano pasa por el pico de Teyde en la isla de Tenerife, una de las Canarias; y esto era lo comun entre los geógrafos hasta pocos años hace que se ha introducido suma variedad en este punto.

Así, cuando se sabe en qué hemisferio está situado un punto del globo, basta considerar el número de grados que señala su latitud y su longitud, para tener su posicion exacta sin que pueda confundirse con ninguna otra.

Un trabajo muy útil para la geografía, la astronomía y la navegacion es el de haber medido el número de grados y fracciones de grado, tanto de longitud como de latitud, que señalan la posicion de las ciudades principales, y otros puntos notables del globo.

Este es un medio segun se hecha de ver de espresar con dos números la posicion de un punto en la esfera; medio enteramente análogo al que se emplea para indicar con dos números la posicion de un punto en un plano.

Esta analogía ha servido para representar la superficie de la tierra en un plano con cuadros ó cuadrículas formadas con líneas rectas.

Las rectas paralelas igualmente distantes I.I, II.II, III.III,.... (fig. 2, lámina 5.ª), representan los meridianos *rectificados* en su longitud natural. En este caso, unas rectas paralelas 1.1, 2.2, 3.3,.... representan los círculos paralelos, no solamente rectificados, sino tambien *alargados*, pues que 1.1=2.2=3.3, &c., no obstante que los paralelos se acorten á medida que se alejan del ecuador.

Demos ahora por sabido que las divisiones 1.2, 2.3, 3.4,.... se alarguen proporcionalmente á los paralelos correspondientes 1.1, 2.2. 3.3, &c. Si se supone que las cuadrículas son muy pequeñas se podrá considerar cada una de las que se han trazado en la esfera como un cuadro plano: su largo y su ancho serán proporcionales al largo y ancho del cuadro, alargado proporcionalmente en los dos sentidos sobre el mapa plano.

Así en el mapa ó carta que se llama reducida, las figuras, de cualquiera especie que sean, que estan trazadas en la esfera, se trasladan á cuadros semejantes.

Cada una de las partes que las componen son por consecuencia semejantes, sus líneas forman los mismos ángulos entre sí y tambien con los paralelos y meridianos, &c. Tales son los mapas llamados especialmente *mapas* ó *cartas* marítimas.

Aplicacion á la direccion de los derroteros en la navegacion. Si se imagina que se navega siempre siguiendo una ruta que haga el mismo ángulo con el meridiano, esta ruta estará representada en la carta reducida por *una linea recta* tirada del punto de *salida al* punto á donde se va. Esta misma línea dará á conocer el *ángulo de la derrota* (1) que debe tomar el navegante para llegar de un punto á otro navegando en un mar esférico ó á lo menos en un mar cuya superficie sea una superficie de revolucion.

Suponiendo que la figura de la tierra es esférica, los geógrafos solo han querido decir, que la tierra á pesar de las desigualdades de toda especie que nos presenta la superficie de ella, se aparta poco de la figura de una esfera comparativamente á su magnitud. En efecto, la altura de las montañas mas elevadas no llega á la *milésima* parte del diámetro de la esfera mas aproximada á la figura y magnitud de la tierra.

Las asperezas mas pequeñas de la cáscara de una naranja son mucho mayores, respecto de esta naranja, que los montes mas altos respecto del volúmen de la tierra.

Para medir estas desigualdades con rigurosa exactitud se supone que por un punto determinado, por ejemplo, la orilla del mar ó de un lago, pasa la superficie de una esfera que tenga el mismo centro que la tierra, y en ella se señalan los meridianos y paralelos correspondientes á los de la tierra.

Para fijar la posicion de un punto cualquiera del globo, se indica la altura de este punto sobre la esfera, y se anota el número de grados de longitud y latitud que dan á conocer el paralelo y meridiano que pasan

(1) *A esto llaman en España el* rumbo.

por la perpendicular tirada del punto observado á la superficie de la esfera.

Cuando espliquemos el equilibrio de los fluidos haremos ver, como por medio del instrumento que se llama *barómetro*, se pueden medir las alturas de los diversos puntos del globo, y referirlas á la superficie de una esfera tomada por punto de comparacion. Tales medidas no son un mero objeto de curiosidad, pues sirven al ingeniero que va á trazar canales y caminos para conocer las alturas de las bajadas y subidas por donde hay que pasar, cuando se quiere ir de un punto á otro. Ademas sirven para dividir el globo en regiones cuyas alturas determinan el clima y muchas propiedades fisicas.

Independientemente de las desigualdades innumerables que forman las ondulaciones mas ó menos estensas, mas ó menos notables de la superficie del globo, presenta la tierra una deformacion general, que es causa de que su figura no sea perfectamente esférica. La tierra está aplanada hácia sus dos polos, y por consecuencia elevada hácia el ecuador. Luego permaneciendo uno en la superficie del globo, cuando estuviere en el polo, se hallará mas cerca del centro de la tierra que cuando estuviere en las regiones medianas, y con mayor razon que cuando estuviere en el ecuador.

Es de la mayor importancia para la industria conocer y apreciar el aplanamiento de la tierra. Este hace que los grados de latitud sean mas largos hácia el polo y mas cortos hácia el ecuador (1); influye sobre la fuerza de la gravedad á la cual estan sujetos todos

(1) *Se puede formar una idea de este efecto examinando la fig.* 36, *de la lámina* IV, *que representa una curva aplanada* BDEFG. *Se puede considerar* BG *como el ecuador y* E *como el polo. El arco* DF *teniendo un rádio* DP *mayor que* BO *y que* GQ, *los grados del arco* DEF *son mayores que los de* BD *y* FG.

los cuerpos; y la cual es mayor en el polo que en el ecuador; por lo que un mismo péndulo transportado del polo hácia el ecuador, oscila cada vez mas lentamente. Las circunstancias siendo las mismas, la columna de aire que pesa sobre el polo es mas pesada que la que pesa sobre el ecuador; y de aquí provienen diferencias en el movimiento de las máquinas hidráulicas y de las máquinas de vapor, &c.

Cuando hablemos de las máquinas y de las fuerzas motrices, vol. 2 y 3, daremos á conocer la ley con que varía la pesantez de los cuerpos, el peso de la atmósfera y la velocidad del péndulo, en los diferentes puntos de la tierra, y enseñaremos las consecuencias que de esto resultan para muchas artes.

Esfera celeste. Se ha hecho uso de la esfera dividida en cuadrículas, por los paralelos y meridianos, para señalar en el cielo como en la tierra la posicion de los astros. Supónese 1.°: que el cielo es una esfera que tiene el mismo eje y centro que la tierra; y 2.° que todos los astros estan situados en la superficie de esta esfera.

Una gran parte de los astros, como son las estrellas, estan siempre á la misma distancia unos de otros en la esfera celeste, y así su posicion relativa no varía.

Si hubiera una estrella que estuviese exactamente situada en la direccion del eje, esto es en el polo, solo ella quedaria inmóvil cuando todas las otras se moviesen. La que se llama estrella polar está muy cerca de nuestro polo, y por esta razon describe un círculo muy pequeño.

Todos los astros varían de posicion respecto de nosotros. Los astrónomos miden el número de grados en latitud y longitud, que señalan esta posicion en ciertas horas del dia, y para cada dia.

Luego que han señalado en el cielo varios puntos aislados que indican suficientemente el camino trazado por el astro, hacen pasar por estos puntos una curva contínua, que es el propio camino que el astro ha

seguido en su movimiento aparente sobre la superficie de la esfera celeste.

Estudiando estas curvas trazadas en el cielo por el movimiento de los astros, han averiguado los astrónomos que son planas, y que se pueden trazar en un cono recto circular ó superficie cónica de revolucion: estas son las secciones cónicas. Los planetas describen *elípses* en su curso; los cometas parece que describen *parábolas*, y el sol ocupa un *foco* de estas líneas curvas (véase la leccion décimatercia.)

Estas aplicaciones de la geometría al curso de los astros tienen tanta importancia, que sin ellas no se hubiera descubierto la gran ley de la atraccion, que esplica las fuerzas y movimientos de todo nuestro sistema planetario; y dá á la ciencia astronómica de los modernos una superioridad inmensa sobre la de los antiguos.

Así es que desde el mero calderero que hace un embudo en forma de cono recto circular, y le corta en bisel si quiere ajustarlo á algun vaso en una posicion oblícua, hasta el geómetra que calcula el rumbo de los cuerpos celestes, y las formas de los conos visuales que tienen por bases las curvas corridas por el centro de los astros; la misma geometría, las mismas superficies, las mismas secciones, las mismas curvas son las que sirven para los usos mas sencillos de los oficios, como para las aplicaciones mas sublimes de la ciencia.

Al hacer tal comparacion, mi propósito es principalmente hacer fáciles las nociones que amedrentan á los que desean estudiarlas; siendo así que se pueden entender facilísimamente cuando se percibe su analogía con las concepciones que nos parecen mas vulgares, porque se aplican á humildes trabajos, ejecutados cada dia con nuestras manos, ó delante de nuestros propios ojos. Yo me atrevo á decir que esta es la verdadera filosofía de la geometría aplicada, sea á las ciencias, sea á las artes y oficios.

Cuando se observa con atencion el espectáculo del

cielo, durante una noche serena, se advierte que los astros de que está sembrada la bóveda celeste no permanecen inmóviles respecto de nosotros, sino que sucesivamente se levantan como el sol del lado del oriente, suben hácia el mediodia, y bajan hácia el ocidente, donde desaparecen hasta el dia siguiente.

En este movimiento cada estrella describe un círculo, y todos estos círculos tienen un mismo eje, que es el de la tierra: así, el espectáculo de los cielos se presenta á nosotros como si la bóveda celeste estuviera animada de un movimiento de rotacion alrededor del eje de la tierra.

Durante una larga série de siglos, naciones enteras han pensado que todos los astros giraban de esta suerte alrededor de nuestro globo, que en la opinion comun permanecia inmóvil en el centro del mundo.

La geometría va á enseñarnos el secreto, la ilusion de este espectáculo.

Nosotros estamos tan distantes de las estrellas que los rayos visuales, tirados á un mismo astro desde los diferentes puntos de la tierra, parecen todos paralelos. Luego el espectáculo del cielo es el mismo, sea que nos situemos en el centro ó en la superficie de la tierra: situémonos, pues, en el centro. Si el cielo hace regularmente una revolucion completa en veinte y cuatro horas alrededor del eje del mundo, la tierra no gira. Si el sol está inmóvil es necesario, por el contrario, que la tierra gire alrededor del eje del mundo. En este movimiento los únicos puntos del cielo, que parecerán fijos, serán los polos del mundo. Siendo variable la distancia de cada astro á estos polos, cada estrella, aunque parezca subir ó bajar, con respecto al horizonte de los diversos puntos de la tierra, estará siempre en un rádio visual, que forma el mismo ángulo, con el que se dirige hácia el polo, y representa el eje del mundo. Luego cada estrella nos parecerá todavía que se mueve en el mismo cono de rádios visuales; y caminando todas las estrellas en sus

conos respectivos, no dejarán de parecernos que permanecen á sus distancias respectivas. El espectáculo del cielo será pues enteramente el mismo, que suponiendo la tierra fija, y el cielo movible.

Vemos, pues, que por medio de una propiedad bien sencilla de la revolucion de los planos, y de los puntos alrededor de un eje fijo, se descubre la identidad de los aspectos del cielo, sea que la tierra, permaneciendo fija, gire la bóveda celeste alrededor del eje de la tierra, sea que, al contrario, permaneciendo inmóvil la bóveda celeste gire la tierra sobre sí misma. Cuando conozcamos las leyes del movimiento circular veremos lo que decide la opinion de los geómetras en favor de este último sistema.

La esfera no es la única superficie de revolucion que se puede engendrar, haciendo girar un círculo alrededor de una línea recta. Si suponemos que el eje de la superficie no pasa por el centro del círculo se formará una superficie del género de las que se llaman *anulares*; porque los anillos, segun los usa la industria, son un caso particular de este género de superficies. Claro está que todos los planos meridianos cortarán la superficie con círculos iguales, fig. 12, y que todos los planos de los paralelos cortarán tambien la superficie con círculos.

Las sortijas que las mugeres y los hombres llevan en los dedos son casi siempre *superficies anulares*, que se llaman anillos.

Empléanse en las artes los anillos ABC, fig. 13, que pasan por el ojo EDH de una armella EDHF empotrada en el suelo, ó en una pared, con el fin de tener un círculo fijo, al cual se pueden atar cuerdas.

Empléase tambien el anillo ó una porcion del anillo en las decoraciones de la *arquitectura*.

La gola AA, el *cuarto bocel* QQ, fig. 14, en los capiteles y basas de las columnas son *cuartos* de la superficie anular, engendrada por la revolucion de un círculo alrededor del eje de la columna; el *bocel* BB ó

toro es una *mitad* de la superficie anular, formada por la revolucion de un círculo alrededor del eje de una columna ó de un arco.

El arquitecto emplea igualmente la superficie anular para construir las bóvedas. En el bello edificio de la alhóndiga ó mercado de granos de París se vé una bóveda espaciosa en forma de semi-esfera ABC, fig. 15, alrededor de la cual hay una superficie anular, cuyo meridiano son los dos semicírculos ADE, CFG.

Los vasos redondos de forma antigua, como los que representan la fig. 16, estan compuestos de partes cilíndricas AB, CD, EF, GH, y de partes anulares *mn*, *pq*, *rs*, *tu*, *xy*.

Cuando un carpintero labra las molduras alrededor de una puerta á medio punto, las partes circulares del hierro de su cepillo describen *superficies anulares*.

La *campana* ABCDE, fig. 17, que sirve para tocar en las fábricas, las iglesias y aun en las habitaciones, es una superficie de revolucion que se compone igualmente de partes cónicas y de partes anulares.

Los marinos hacen uso de un anillo semicircular, á que llaman *amarra*. Una cuerda rodea al anillo, atada á él por la parte de afuera, de manera que no pueda salirse el anillo, otra cuerda pasa por el anillo y corre por él con libertad.

Los astrónomos, durante un largo tiempo, no han podido esplicar las fases de Saturno y de su *anillo*, que se presentaba bajo los diversos aspectos I, II, III de la fig. 11, pero luego que adquirieron conocimientos geométricos mas estensos, les fue fácil conocer que el *anillo*, variable en sus aspectos I, II, III, que unas veces parece que rodea, y otras que atraviese el globo de Saturno, es realmente constante, de forma y de magnitud. El método sencillo y fácil de las proyecciones ha sido suficiente para esplicar todo esto.

Una superficie anular, que tiene grandísimo uso en las artes, es la *rueda*. Las que se emplean en las ca-

jas de poleas son unos cilindros de muy poco grueso, respecto de su ancho, y socavados en su contorno, en donde tienen la forma de una superficie anular, cuya generatriz es un arco de círculo.

Las *pinas* de las ruedas de coche *m*, *m*, *m*...., fig. 18, forman tambien una superficie anular de revolucion. Estas ruedas tienen en el centro una parte maciza ABCD, que se llama el *cubo* de la rueda. Tienen tambien los *rayos*, que estan repartidos con igualdad, y unen esta primera superficie de revolucion con el anillo que forman las *pinas*. Estas se componen de partes iguales, y estan cubiertas con *llantas*, que son unas fajas de hierro, las cuales cruzan los estremos de las pinas, á las cuales estan clavadas.

Hay ruedas que tienen todos sus rayos en un mismo plano *r*RR*r*; en cuyo caso las llantas de hierro son en todas partes perpendiculares á dicho plano, y forman un cilindro.

Hay otras ruedas en que los rayos S*s*, S*s* tienen una direccion como las aristas de un cono recto circular. Las llantas estan perpendiculares á la direccion de los rayos, y forman una superficie cónica. Tales son las ruedas cónicas.

Cuando examinemos las propiedades mecánicas de las ruedas compararemos las ventajas é inconvenientes respectivos que tienen estas dos especies de superficies de revolucion en el transporte de las cargas por los caminos.

Una de las superficies de revolucion mas notable por la sencilléz de su estructura es la de los toneles. Estan estos compuestos de tablas delgadas, á que llaman *duelas*, y juntas por sus costados de manera que doblándolas con fuerza, y manteniéndolas dobladas de esta suerte con aros paralelos AB, *ab*, *cd*, CD, fig. 19, resulta la superficie de revolucion en que los aros mismos son los paralelos, y las juntas de las duelas son los meridianos.

Para formar estas superficies de revolucion se compone un plano circular con otras tablas delgadas para servir de suelo. Este plano circular está cortado en su borde, en forma de bisel cónico, para entrar en una ranura circular, llamada *jable*, que se hace en la cara interior de las duelas.

Para trabajar las duelas, despues de haberlas reducido al grueso conveniente, las rebaja el tonelero por ambos lados, pasando su cara delgada por una gran garlopa fija. Hace esto sin mas guia que la vista, de donde suelen resultar irregularidades notables en la configuracion de los toneles.

Ha habido quien ha pensado en emplear medios geométricos para trabajar las duelas y darles una forma regular perfecta. Supongamos que se doble cada duela entre tres ó mas puntos fijos A, B, C, fig. 20, y que siendo O*o* el eje del tonel, y ABC la duela de él, se tenga un cepillo, cuyo hierro esté situado en un plano meridiano, ó que pasa por el eje O*o*. Supongamos que dicho hierro pueda dar vueltas alrededor del dicho eje, y tambien ir y venir en el plano meridiano. Estando el cepillo tan cerca como sea menester de la duela ABC, se trabajará la cara chica: 1.° por encima, segun la forma que conviene al meridiano ó perfil del tonel; 2.° volviendo la duela lo de arriba abajo.

Las duelas labradas de esta manera podrán formar una superficie de revolucion muy exacta.

Por este principio se estableció en Glasgow, en Escocia, una gran fábrica de toneles, la que ya no existe. En Francia hay una que parece que va bien.

Luego que estan puestas todas las duelas se cortan los dos estremos, siguiendo un plano perpendicular al eje. Despues se abre la ranura llamada *jable* con un cepillo semejante al *gramil* de los carpinteros, el cual tiene un lado plano, que asienta sobre la circunferencia, presentada por el estremo de las duelas, y al mismo tiempo el hierro estrecho y saliente del cepillo está en una línea vertical, á cierta distancia, debajo del

lado plano, para abrir el jable. Se cortan los suelos puestos uno sobre otro, que formen un círculo de igual rádio al del jable. Hecho esto se abren las duelas hácia un estremo, lo bastante para meter las duelas en el jable. Despues se aprieta el tonel, quitando los aros que se pusieron provisionalmente para construirlo, y poniendo en su lugar los aros de madera ó hierro que han de tener.

Los toneles son entre todos los sistemas de reunion de piezas de madera los mejores que hay para contener líquidos, sin que salga nada de ellos, siempre que la madera es sana, y estan fabricados con exâctitud.

Entre los objetos que componen el cargamento de una nave hay gran cantidad de barricas que ocupan muchas filas AB, CD, EF, fig. 21; importa mucho conocer de antemano la altura de estos planos para ver el espacio que ocuparán los toneles de vino, agua, aguardiente, &c., en la cala de la nave, y por consecuencia el espacio que quedará para los demas objetos que componen el cargamento (1).

---

(1) *Observemos que las barricas* m, n, p, *suponiéndolas iguales, se tocan las tres; por lo que sus tres centros distan unos de otros tanto como el diámetro mayor de cada barrica. Si en el triángulo* mnp, *desde el vértice* n, *tiramos la recta* nh, *perpendicularmente á* mp; *haciendo* $mh = \acute{a}\ hp = 1$, *será* $mn = 2$; *y por la propiedad del cuadrado de la hipotenusa se sabe que* $nh^2 = mn^2 - mh^2 = 4 - 1 = 3$.

Esto manifiesta que nh *es igual con corta diferencia á* 1,73. *Pero como los centros* m, p, *estan levantados del suelo tanto como es el rádio de las barricas* = 1, *la altura del centro* n *será* 2,73.

Si la barrica n *estuviese puesta directamente sobre la barrica* p, *la altura del centro de* r *sobre el suelo sería tres veces el rádio; luego la colocacion actual de cada fila de toneles hace ganar cerca de 27 centésimos del rádio.*

Aunque la combinacion de la fig. 21 hace ganar 27 centésimos del rádio de las barricas todavia se pierde mucho espacio. Evítase esta pérdida valiéndose de cajas de hierro, de forma cúbica, para llevar el agua en las naves, lográndose además que el agua se conserve mejor en dichas cajas.

En los arsenales suelen formarse pilas de balas, obuses, bombas y granadas de un mismo diámetro ó calibre, que estan en planos horizontales, fig. 22. La basa de las pilas es por lo comun un rectángulo, y su figura es la de un prisma triangular de lados simétricos (1).

---

(1) *Para determinar el número de balas que contiene una pila de forma de prisma truncado prismático, semejante á la de la fig. 22, se cortará el número de balas que tiene una de las caras triangulares* ABC, *que siendo* r *las filas de balas, será*

$$1 + 2, + 3 + \dots + r.$$

Se multiplicará este número total por la suma de las balas que hay en las tres filas estremas $Aa + Bb + Cc$, *que representan las aristas del prisma truncado simétrico* ABCabc.

Sea n *el número de balas de* Aa; *cada una de las hiladas* Bb, Cc, *tendrá* $r - 1$ *balas mas que* Aa. *Luego* $Aa + Bb + Cc = 3n + 2r - 2$. *Luego el número total de balas de la pila es el producto siguiente.*

$$(1 + 2 + 3 + \dots + r)\tfrac{1}{3}(3n + 2r - 2)$$

Cuando no hay mas que una bala en la hilada Aa *se convierte el prisma en una* pirámide cuadrangular, *cuyo número de balas es*

$$(1 + 2 + 3 + \dots + r)\tfrac{1}{3}(3 + 2r - 2)$$

ó bien $(1 + 2 + 3 + \dots + r)\tfrac{1}{3}(2r + 1)$.

Cuando la pila es triangular, $Aa = 1$, $Bb = 1$, $Cc = r$; *y así* $Aa + Bb + Cc = r + 2$. *Por consiguiente en una pila triangular que tiene* r *hiladas de balas, el número de balas es*

$$(1 + 2 + 3 + \dots + r)\tfrac{1}{3}(r + 2).$$

LECCION DUODÉCIMA.

Superficies espirales.

Antes de esplicar las propiedades de las superficies espirales y sus aplicaciones á las artes, es necesario examinar las curvas que dirijen la construccion de estas superficies.

Habiendo trazado el rectángulo OH*ka*, fig. 23, dividámosle en fajas de igual latitud, por medio de las líneas rectas paralelas A*b*, B*c*, C*d*, &c. y tiremos todas las oblícuas A*a*, B*b*, C*c*, D*d*...., que serán evidentemente paralelas entre sí, pues que interceptan iguales porciones de otras paralelas AB=*ab*, BC=*bc*; CD=*cd*, &c.

Supongamos ahora que se dobla el rectángulo, segun la forma de un cilindro cualquiera, en que sea OH una de sus aristas. Cerremos enteramente el cilindro de manera que *ak* venga á aplicarse exactamente contra OH, y entonces el punto *a* caerá en O, *b* en A, *c* en B, *d* en C, &c. Las aristas siendo todas paralelas á OH, y *ak* estarán representadas en el rectángulo OH *ak*, por las rectas PQ, RS, TU, &c. paralelas á los lados OH, *ak*. Pero en el rectángulo todas estas rectas paralelas cortan bajo un mismo ángulo las oblícuas A*a*, B*b*, C*c*...., pues que estas oblícuas son paralelas. Por último, cuando se dobla el rectángulo sobre el cilindro, fig. 25, cada uno de los ángulos que forman las oblícuas A*a*, B*b*, C*d*...., fig. 23, con las aristas PQ, RS, TU, no varian. Luego la propiedad de las oblícuas A*a*, B*b*, &c. será que reuniéndose en el cilindro en los puntos A*b*, B*c*, C*d* &c. de la fig. 23, formarán una curva que hará en toda su estension el mismo ángulo con las aristas del cilindro, curva única que se llama una *helice* ó *espiral cilíndrica.*

Cuando se dobla el rectángulo de manera que forme un cilindro, cuya base sea un círculo, se tiene la *helice* que mas frecuentemente se emplea en las artes.

Supongamos ahora que dos puntos se adelantan á un mismo tiempo partiendo de H; el uno segun el lado H*k* del rectángulo, fig. 23, y el otro segun la oblícua H*h*. Supongamos que los dos puntos pasan á un mismo tiempo: 1.° sobre PQ; 2.° sobre RS; y 3.° sobre TU.... En virtud de la propiedad de las líneas proporcionales, se tendrá:

HQ : Q*q* : : HS : S*s* : : HU : U*u*, &c. Luego el punto que sigue la direccion oblícua H*h*, se aleja de la base H*k* las cantidades Q*q*, S*s*, U*u*...., proporcionales á la distancia que hay de la arista OH, á las aristas PQ, RS, TU....

Luego si se hace girar alrededor del cilindro una de sus aristas HO, en tanto que un punto camina á lo largo de esta arista, de manera que los espacios corridos por el punto y por la arista sean proporcionales, el punto de que se trata describirá una *helice* ó *espiral* tal como está representada en la fig. 25. Así....

La espiral se produce por un punto, que girando alrededor de un eje, camine en el sentido paralelo á este eje, proporcionalmente á la cantidad de que gira, alrededor del mismo eje.

Por consecuencia el *tornero* puede describir una espiral sobre un cilindro, con una herramienta cortante que camine paralelamente al eje, proporcionalmente á la cantidad de que este cilindro gira alrededor del eje.

Por consecuencia tambien á cada vuelta del cilindro, la herramienta del *tornero*, para describir una espiral, ha de caminar una misma longitud; y esta que en toda su estension es la misma es el *paso* de la helice ó espiral. Luego la *distancia de las diferentes vueltas de las helices ó espiral medida sobre cada arista es constante, lo que vale tanto como decir, que el paso de la espiral es uno mismo.* Supongamos que se saque, fig. 24, por impresion ó de otro modo una prueba

de la fig. 23, esto es, que se ejecute otra figura simétrica á la primera, y que se doble sobre un cilindro, fig. 26, igual al de la fig. 25, y resultará una espiral dirigida en *sentido contrario* de la espiral fig. 25.

La espiral de la fig. 25 se llama *vuelta á la derecha*, y la de la fig. 26 se llama *vuelta á la izquierda.* Cuando los cilindros, fig. 25 y 26, son iguales, y que el paso de la rosca es el mismo, la espiral vuelta á la derecha es simétrica con respecto á la espiral vuelta la izquierda.

Figura espiral de la rosca. En lugar de hacer girar un solo punto alrededor de un eje, podemos hacer girar una figura plana cualquiera, como un triángulo, fig. 27, un cuadrado, fig. 28, &c., y entonces formaremos superficies que podrán ser en hueco ó en relieve, sobre los cilindros que pueden igualmente estar en relieve ó en hueco. Llámase filete ó cordon el hueco ó el relieve en espiral formado alrededor del cilindro por el triángulo ó el cuadrado en relieve ó en hueco que camina á lo largo de la *helice ó espiral,* conservando siempre su figura generadora en una misma posicion con respecto al contorno de esta helice, y á la direccion del eje del cilindro.

Llámase *rosca* el cilindro ABCD, fig. 27 y 28, que tiene el filete ó cordon en su superficie convexa, y se llama *tuerca* el cilindro hueco que tiene un filete en espiral cortado en su superficie cóncaba.

Supongamos ahora que haya dos cilindros de un mismo diámetro en cuyo contorno esté trazada la misma espiral de que se haga despues la directriz de un filete, el uno en relieve y el otro en hueco, lo que produce una *rosca* y una tuerca de un mismo filete ó cordon, y del mismo paso. Yo digo que se puede introducir la rosca en la tuerca haciéndola á un mismo tiempo caminar y dar vueltas sin que deje ningun vacío entre ella y la tuerca, y sin que ésta en ninguna parte tenga que disminuir su grueso.

* Supongamos en efecto que se empieza á meter el

estremo del filete en relieve de la rosca en el estremo del filete hueco de la tuerca, estando los dos cilindros de la rosca y de la tuerca ajustados de manera que sus ejes esten en línea recta. *

* Esto sentado, y permaneciendo fijo uno de los cilindros, hagamos girar el otro, de manera que cada punto de su filete camine paralelamente al eje proporcionalmente á la cantidad de que gira, y en la relacion misma indicada por la curvatura de la helice ó espiral que sirve de directriz á los filetes. El perfil de la superficie de los filetes describirá la superficie misma del filete hueco. Luego el filete en relieve se introducirá todo él sin vacío y sin compresion en el filete hueco. Tal es el movimiento de la rosca en su tuerca. Se han construido geométricamente y con el mayor cuidado las roscas triangulares y cuadradas, á fin de que los alumnos puedan imitar en grande las proyecciones de las fig.s 27 y 28, lo que será uno de los mejores ejercicios geométricos que se les pueden proponer. *

Así como hay dos especies de espirales, las unas vueltas á la derecha, y las otras vueltas á la izquierda, así tambien hay dos especies de roscas y de tuercas, las unas vueltas á la derecha, y las otras á la izquierda. Es evidente que una rosca vuelta á la derecha no puede encajar en una tuerca vuelta á la izquierda, y que una rosca vuelta á la izquiarda no puede encajar en una tuerca vuelta á la derecha.

Las roscas tienen contínuo uso en las artes; pues sirven ya para cambiar el movimiento circular en movimiento rectilíneo, ya para producir el cambio inverso. Véase el tomo 2.° de las máquinas.

Observemos, fig. 23, que el paso OA = AB.... de una rosca puede ser muy pequeño con respecto á la longitud H*k* del contorno del cilindro; ademas el triángulo H*kh* presenta una *escalera* semejante á la que se formó, leccion 5.ª, fig. 27, y compuesta de partes Q*q*, S*s*, U*u*...., que son entre sí : : **1** : **2** : **3** :.... Si el contorno de la base presenta divisiones iguales HQ, QS,

SU...., un error bastante sensible en estas longitudes, puede pues ser mucho menos considerable en las alturas, Qq, Ss, Uu....

Aplicacion. La industria se ha servido de esta propiedad geométrica para dividir con mucha exactitud las líneas rectas en *partes iguales* por medio de la rosca.

Propongámonos dividir la regla AB, fig. 29, en partes iguales con grande exâctitud. Supongamos que el paso de la rosca MN, cuyo eje es paralelo á AB, sea la décima parte de la circunferencia del cilindro en que está cortada la rosca; y que el radio de esta base sea el décimo del de una chapa circular PQ, cuya circunferencia está dividida en partes iguales. Supongamos, en fin, que el error de las divisiones de PQ pueda llegar hasta un *milímetro*, lo que seria inescusable en las operaciones un poco exâctas. La circunferencia de PQ es *cien* veces mayor que el paso de la rosca, y cada vuelta de PQ no hace adelantar ó retroceder mas que de un *paso* la manecilla XY movida por esta rosca. Luego el error en el espacio que anda la manecilla, no puede ser mas que la centésima parte del error de las divisiones del círculo PQ. Cuando el error sobre PQ no pasa de un *milímetro*, no podrá pasar de un centésimo de milímetro sobre AB, esto es, una cantidad muy inferior á la que podemos apreciar con la atencion mas delicada de nuestra vista.

Hagamos girar el círculo PQ, de manera que un indicador fijo Z corresponda sucesivamente á las divisiones bastante cercanas 1, 2, 3...., de este círculo, y dividiremos la recta AB en partes muy pequeñas, cuyas desigualdades serán inapreciables para nuestros sentidos.

Las máquinas para hacer las roscas estan dispuestas con aquellas proporciones que se requieren entre las divisiones longitudinales AB, y las divisiones de un círculo PQ. Es necesario esplicar estas máquinas presentándolas á la vista de los alumnos.

Las roscas se diferencian mucho segun la figura de

los filetes ó cordones, y unas veces la seccion de este filete perpendicular á la espiral directriz es un triángulo equilátero, y otras veces es un cuadrado; lo que produce las roscas de cordon *triangular*, fig. 27, y las roscas de *cordon cuadrado*, fig. 28.

Empléanse las roscas para acercar ó para separar las reglas y los cilindros paralelos, sin alterar su paralelismo. Supongamos, en efecto, dos roscas iguales; una á cada estremo de un par de cilinoros, dispuestos de manera que girando estas roscas hagan que los ejes de los cilindros se acerquen ó se separen uno de otro. Cuando den vuelta las dos roscas igualmente se acercarán ó alejarán igualmente los cilindros; pero el espacio andado por un indicador fijo en cada rosca puede fácilmente ser 100, 200, 300.... veces mayor que el paso de la rosca, y en este caso un espacio corrido por el indicador no producirá mas que uno 100, 200, 300 veces menor para separar ó acercar los cilindros. Se podrá, pues, arreglar su distancia con suma exactitud, lo que en muchas operaciones es de grande importancia para la industria.

Pueden hacerse otras muchas aplicaciones del mismo género para medir ó andar longitudes, con tal exactitud, que esceda considerablemente el límite á que podríamos llegar, con el solo uso de nuestros sentidos. La fabricacion de los instrumentos de óptica y astronomía presentan numerosos ejemplos de ello en el uso que se hace de los tornillos sin fin.

Si ocurre poner exactamente á nivel un instrumento que descansa en tres ó en cuatro pies, se pone fija debajo de cada uno de estos pies una rosca ó tornillo sin fin, que se tornilla ó destornilla poco á poco, segun que es menester bajar ó subir el instrumento del lado de uno de estos pies. De esta manera se va llegando á la verdadera posicion por grados insensibles, lo que permite pararse precisamente en el punto necesario. Hay tornillos sin fin en los instrumentos de reflexîon para colocar los espejos en su verdadera po-

sicion, y los hay para acercar ó separar ciertas partes de otros instrumentos, &c.

La naturaleza nos ofrece un sin número de espirales en los vegetales; las plantas rastreras se levantan alrededor de un cilindro vertical, cual es el tronco de un árbol, ó de un arbusto ó una mera estaca, describiendo una espiral. Otras veces la planta echa largas ramas, que se agarran á ciertos puntos por unos filamentos que se doblan en espiral. Muchos vasos interiores de las plantas tienen igualmente una forma espiral, y muchos vegetales tienen sus ramas, ó sus hojas, ó sus frutos insertos en una direccion espiral sobre el vástago que los sostiene.

Aplicaciones. Las artes han imitado estas formas espirales de la vegetacion, sea para atar los cuerpos, sea para penetrarlos.

Cuando los cirujanos envuelven con vendas los miembros, cuya figura se acerca á la de los cilindros, como son los dedos, las piernas ó los brazos, lo hacen dando á estas vendas una direccion espiral, para cubrir gradualmente un espacio mucho mas ancho que la venda, la que puede despues mantenerse fácilmente con la mas sencilla atadura.

Nosotros hablaremos particularmente de las barrenas, de los taladros, de los tirabuzones, de los sacatrapos, cuando espliquemos las propiedades mecánicas de la rosca y la cuña. (En el *tomo* 2.° *de las máquinas*).

Columnas salomónicas. Vénse troncos de árbol alrededor de los cuales se ha enredado una rama de yedra en espiral, y ha producido una compresion tal, que el tronco no puede engordar sino entre las vueltas de esta espiral, y toma la forma de una rosca ó cordon redondeado. Este es el modelo de las columnas salomónicas ó mosáicas, fig. 30: columnas que no teniendo ni la sencilléz, ni la fuerza de las columnas ordinarias, no pueden agradar mas que á las imaginaciones caprichosas.

Un ornato gracioso y mas digno de las bellas artes es el de las guirnaldas de flores, que se doblan en

espiral alrededor de columnas regulares, ó bien alrededor de los vestidos ligeros de las jóvenes, adornadas para las fiestas y bailes.

Volvamos á las aplicaciones útiles. *Serpentin del alambique.* Este es un instrumento, fig. 31, que se asemeja por su forma al tirabuzon, pero que es hueco en lugar de ser macizo, y está formado por el movimiento de un círculo, cuyo centro anda una helice ó espiral, á la que su plano permanece siempre perpendicular. Cuando un fluido vaporizado por la destilacion pasa por el serpentin que está metido en un tonel lleno de agua fria, el vapor se condensa y llega al estremo del serpentin reducido á líquido sensiblemente frio. Así es como se condensan los aguardientes y otros espíritus producidos por la destilacion.

El esterero y el que teje sombreros de paja fabrican cilindros, fig. 32, con pleitas ó trenzas estrechas y planas, las que teniendo en toda su estension un mismo grueso representan las fajas A*a*, *b*B, B*b*, *c*C, &c., fig. 23. Doblándolas segun el contorno de un cilindro, y cosidas una con otra, reproducen exactamente la superficie de él. Empleando un proceder análogo se puede fabricar un plano, un cono, una esfera, estendiendo un poco el uno de los bordes de la trenza, ó bien estrechando un poco el borde opuesto.

Cuanto mas estrecha es la trenza, y cuanto menos hay que estender ó estrechar uno de los lados, tanto mas la superficie que se llega á fabricar se acerca á la forma rigorosa que se ha concebido. La perfeccion de los hermosos sombreros de paja de Florencia, consiste en la perfecta igualdad de amplitud, y de fuerza de las trenzas, en su poco ancho, en la finura de las pajas y el aspecto regular del tejido.

Los maquinistas hacen mucho uso de resortes en espiral, cuyos efectos esplicaremos al tratar de la elasticidad. Tales son muchos resortes de los carruages.

Hay personas que tienen los cabellos rizados naturalmente en espiral, y las hay que hacen rizar de este

modo sus cabellos, envolviéndolos en un cilindro caliente de pequeño diámetro, ó simplemente doblándolos en espiral, y poniéndoles una cubierta de papel á que llaman papillote, comprimiéndolos luego entre unas pinzas de hierro bastante calientes. El calor disipa la humedad que impregnaba los cabellos, y los tenia flojos y caidos en línea recta; la compresion les dá una curvatura en espiral que conservan despues, mas ó menos tiempo, segun la naturaleza de los cabellos, y el estado de la atmósfera.

El arte del peluquero y del pintor, que se propone componer una hermosa cabellera, consiste en agrupar las espirales formadas por masas ó bucles de cabellos, y de tal manera combinados que presenten un todo en armonía con el género de trage y la fisonomía de la persona que adornan. Pueden citarse como modelos muchos peinados griegos y romanos, en donde estas combinaciones de formas espirales estan concebidas con gran tino.

Vamos ahora á hablar de un género de espirales mucho mas importante que la mayor parte de los ejemplos citados hasta aqui: hablaremos de los *hilos y las cuerdas*.

Fórmanse para los tejidos y las cuerdas hilos mas ó menos delgados con el cáñamo, el lino, el *phormium tenax*, con la corteza de algunos árboles &c., y tambien con la borra vegetal llamada algodon, la lana, el pelo de los animales, &c.

Antes de formar los hilos es necesario valerse del peinado y el cardado para poner paralelos los filamentos de la materia primera, y dividirlos en partes muy delgadas, tan iguales como sea posible en grueso y longitud.

Hilado del cáñamo y del lino. Este hilado se ha hecho primeramente con el huso. A medida que el hilo se tuerce se le envuelve en el huso, despues se hace una lazada fácil de desatar hácia la punta del huso. La hilandera hace dar vueltas entre los dedos de su mano

derecha á la punta del huso, lo que comunica una torsion suficiente á la parte del hilo, que no está envuelta en el huso, parte que la hilandera alarga tirando con la mano izquierda los filamentos paralelos de la rueca. Estos filamentos adquieren una forma espiral.

Como el hilado con el huso es el mas lento de todos, se ha reemplazado primeramente el huso con un torno muy sencillo, fig. 33, que una mano ó el pie de la hilandera pone en movimiento. A medida que se va torciendo, el hilo se envuelve en el carrete, que no es mas que un uso mecánico. La torsion la produce el torno mismo. Así la hilandera no tiene mas que tirar de los diversos filamentos que estan en la rueca para ordenarlos en la posicion propia para formar un hilo que en toda su estension tenga un mismo grueso.

Envuélvese el hilo en el carrete del torno de la hilandera por medio de unas aletas, fig. 34, que tiene unos ganchos. Estas aletas están fijas en un eje *mn*, que pasa al traves del carrete ó cilindro de madera *rs*, en que el hilo se envuelve. Hácese andar el cilindro de manera que dé una vuelta mas pronto que las aletas, y de este modo el cilindro tira del hilo que ha de envolverse en él, y este se va envolizando gradualmente.

Supongamos para fijar las ideas que el cilindro da cinco vueltas completas mientras las aletas no dan mas que cuatro. Resultará de esto que el hilo se envolverá una vuelta completa cuando el cilindro haya dado cinco vueltas y las aletas cuatro vueltas. Dánse estos diferentes movimientos de rotacion por medio de la rueda del torno OAB, fig. 33, en el cual hay otras dos ruedas pequeñas *mn*, *pq*, cuyos diámetros sean entre sí : : 4 : 5. Por medio de las cuerdas tirantes A*mn*B, A*pq*B, sobre la garganta de las ruedas pequeñas, y de la grande, es evidente que las dos cuerdas corriendo un mismo espacio sobre la garganta AB, cuando esta garganta da vuelta, es necesario que el torno *mn* dé cinco vueltas, cuando *pq* diere cuatro. Esta es la relacion que teníamos necesidad de establecer.

La ventaja que el torno lleva al huso es muy grande. Han pasado siglos enteros antes que los pueblos imaginasen esta máquina que despues la han dejado muy atrás las invenciones modernas.

Hilado de la lana y del algodon. Las cardas forman primero unas mantas anchas que tienen en toda su estension la misma anchura y el mismo grado de delgadez. Despues se estiran á fin de formar cintas estrechas. Un ligero grado de torsion las convierte en mecha. Tómase ésta, se tuerce, se estira poco á poco, sea con la mano, sea con una máquina. Dásele vueltas á medida que se adelanta para torcerla con igualdad, ó bien darle un torcido que sea uno mismo en todas sus partes, así que el volúmen de los filamentos torcidos, á fin que el hilo sea en toda su estension de igual grueso. Cada filamento en esta torsion constante forma una *espiral* que tiene por eje el eje mismo del cilindro que forma el hilo.

El torno que sirve para hilar el algodon se compone de una rueda mayor OAB, fig. 35, de un pasador con una rueda pequeña CD, y de una cuerda sin fin ABCD. El pasador recibe el hilo como lo haria el huso de la hilandera, cuyo hilo se alarga como una mecha en la parte no torcida. La obrera toma esta mecha á la distancia conveniente del pasador. Con la otra mano hace andar la rueda grande AOB, en tanto que con la primera mano con que ha tomado la mecha, la alarga alejándose del pasador. El movimiento de rotacion se comunica del carrete á la mecha, con lo que ésta le tuerce, y se forma un hilo, cuyos elementos tienen una curvatura en espiral. La torsion de estas espirales depende: 1.° de la velocidad con que anda la rueda AOB; y 2.° de la lentitud con que se alarga la cinta de la carda. Cuando cierta parte de la mecha está transformada en hilo con el grueso y la torsion convenientes, la obrera para un poco el torno para deshacer la espiral que dicho hilo formaba en el estremo del pasador; y poniendo luego este hilo en una direccion perpendicular al eje del carrete, da vueltas al torno en sentido contrario del primer movimiento, en cuyo caso el hilo, en lugar de torcerse, se envuelve en el carrete, formando en él muchas espirales. Aquí se ve que se ejecutan con una máquina las mismas operaciones que con el simple huso de la hilandera.

Ha ocurrido la idea de valerse de un medio mecánico en lugar de los dedos de la hilandera, y esta es la parte mas original y mas notable de las nuevas máquinas de hilar. Hácense pasar las mantas ligeras que salen de las cardas, entre varios cilindros pareados ó laminadores paralelos, combinados de manera que el primero par ande con menos velocidad que el segundo, y éste con menos que el tercero. De esta suerte las mantas tienen que alargarse entre estos tres pares de cilindros, y por consecuencia se estrechan. Pasando á otro sistema compuesto como el primero de tres pares de cilindros, se da á las cintas de algodon ó de lana un nuevo grado de torsion, y despues se envuelven en los carretes.

Esto hecho, se coloca un cierto número de carretes en ejes verticales, puestos en fila en la máquina de hilar. Esta máquina hace todas las funciones de la hilandera; estira el hilo, lo tuerce, y lo envuelve en el huso. El tiro lo hacen tambien en ella tres pares de cilindros, que tienen volocidades diferentes; de allí cada hilo pasa en un carrete con una aleta como el torno ordinario. Tal es la máquina de hilar, llamada *continua*, porque se hila en ella sin descontinuar los mismos géneros de movimientos.

En la máquina llamada *Mull-Jenny*, que queda citada en la leccion 2.ª pág. 21, el tiro se hace no solamente por la diferencia de velocidad de los laminadores, sino tambien haciendo alternativamente acercarse y separarse de los cilindros laminadores, todos los carretes en que el hilo se ha de enrollar. Cuando los carretes se apartan, los hilos se estiran, y cuando se acercan, los hilos se envuelven en los carretes. La torsion de los hilos se opera cuando los carretes llegan al término de su curso.

Una máquina de hilar gordo tiene 108 carretes, una máquina para hilar fino tiene 216 carretes, cuidando de ellos un hilandero y dos muchachas para pegar las cintas. Hila rigularmente 40 quilogramas (87 libras castellanas) de hilo, núm.° 30, en once horas de trabajo.

Vemos pues que tres personas bastan para un número de hilos que exigirán 216 hilanderas al huso ó al torno, y cada hilo se hace mucho mas pronto que con los dedos de la hilandera; véase pues la inmensa ventaja de los medios de operar que suministra la geometría para formar con filamentos vegetales torcidos en *espiral* unos hilos cilíndricos que tienen exactamente un mismo diámetro.

Haránse estas esplicaciones á los alumnos poniéndolos delante algun torno, y si es posible, máquinas de hilar.

La seda. Tal como el gusano la produce está doblada en espiral, sobre una superficie de revolucion, llamada el *capullo*. La primera operacion consiste en desenvolver el hilo de este *capullo*, y envolverlo en un carrete; despues se le da cierto grado de torsion haciéndole pasar á otro carrete. Los hilos así preparados estan torcidos hácia una mano, de manera que todos los puntos que sobre su superficie cilíndrica estaban en línea recta antes de la torsion, forman ahora una espiral. Juntánse estos hilos 2 á 2, 3 á 3, y aun 4 á 4, dándoles una segunda torsion al reves de la primera, lo que deshace en parte ésta, y dobla los hilos en espiral, los unos al lado de los otros. En este estado la seda se llama *seda torcida* ú *organzino*.

La operacion que acabo de describir es semejante á la que se necesita emplear para fabricar las cuerdas con el cañamo.

Por efecto de las dos torsiones, las partes de cada hilo tiran á revolverse en un sentido: los hilos plegados en espiral tiran á revolverse en sentido contrario, y el equilibrio que se establece entre las dos torsiones, impide que los diversos hilos se desenvuelvan

indefinidamente cuando cesa la compresion de una fuerza estraña. Sobre este asunto no puedo ofrecer ahora pormenores mas estensos, que pertenecen á la ciencia de las fuerzas, y no pertenecen á la simple geometría.

Con el cañamo se fabrican primero unos hilos torcidos aisladamente, torcidos solos en un sentido, y torcidos muchos juntos, en el sentido opuesto, para formar las cuerdas simples, llamadas *cordones* ó *canalones*. Tuercénse juntos 2, 3, 4 cordones en sentido opuesto al segundo, esto es, en el mismo sentido de la torsion de los primeros hilos, para formar unas cuerdas que se llaman cordeles. Tuercénse estos en el segundo sentido, juntándolos 3 á 3 ó 4 á 4, para formar los calabrotes. Tuercénse estos 3 á 3 ó 4 á 4 para formar los *cables*.

De algunos años á esta parte los ingleses han imaginado medios ingeniosos para hacer la torsion de los hilos y las cuerdas con máquinas. La regularidad geométrica de todos los movimtentos empleados en estas máquinas ha producido los mas felices resultados; de suerte que con un tercio y aun menos de material, segun el grueso y la naturaleza de las cuerdas, con una ejecucion mas perfecta se logra en el dia la misma fuerza. Este es uno de los ejemplos mas notables que pueden citarse de la ventaja que hay en sustituir los medios científicos al poco mas ó menos de las operaciones puramente manuales.

Nosotros invitamos á los fabricantes de cuerda á que hagan un estudio serio de estos medios nuevos, que tienen las dos ventajas de economizar mucho los gastos del material y de la mano de obra, y de dar unos productos mas perfectos bajo todos aspectos. *(Véase 2.° volúmen, Máquinas).*

Nos queda que hablar de un género de superficies gauchas frecuentemente empleadas en la arquitectura civil y naval, y en la estructura de las máquinas. Estas superficies son las espirales engendradas por el movimiento de una línea recta, ó de un arco de círculo.

Superficies espirales de las escaleras. Entre las diversas superficies gauchas, que hemos examinado (leccion 2.ª), las que presentan las escaleras de caracol, son *superficies espirales.*

La superficie espiral de la escalera de una torre redonda esta formada por el movimiento de una línea recta horizontal apoyada en sus estremos, sobre el mismo eje de la torre que sirve de caja á la escalera, y en el otro estremo, sobre una espiral trazada segun el contorno interior de la torre.

Si se da la misma altura á todos los escalones de la escalera es evidente que tendrán tambien el mismo ancho á distancias iguales del centro. Por consecuencia si ABC, fig. 36, es el círculo que representa la base del cilindro que forma la caja de la escalera, cualquiera otro círculo trazado desde el mismo centro que el primero, estará dividido en partes iguales por la proyeccion horizontal de los escalones.

Superficie espiral de la rosca de Arquimides. La superficie espiral de que acabamos de hablar no es otra cosa mas que la rosca de Arquimides, así llamada, por que este gran geómetra fue el inventor de ella. En otro lugar esplicaremos con detencion la aplicacion que se ha hecho de esta rosca para subir las aguas, cuando describamos las máquinas hidráulicas (volúmen 3.°).

* Habiendo tenido la ocasion de hacer construir de madera la rosca de Arquimides diré aquí de qué medios me he servido. *

* Primeramente he dividido el contorno ABCD figura 41, en tantas partes iguales como pedazos de madera yo queria emplear para formar una vuelta completa de la espiral. *

* Hice escuadrar unos prismas cuya base ODC fuese el sector que representa una de las divisiones iguales, así formadas sobre la cara cilíndrica, que tiene DC por proyeccion horizontal: tiré una línea recta, inclinada segun la direccion de la helice ó espira que la superficie espiral traza en el cilindro ABCD. *

* Dividí en partes iguales D*d*, *dd'*...., C*c*, *cc'*...., los rádios OD, OC; despues con una sierra, teniéndola siempre á igual distancia de los dos puntos C, D, hice aserrar el pedazo de madera escuadrado de manera: 1.° que sobre la base superior de este pedazo de madera el corte de sierra rematase en D, mientras que sobre la base inferior el mismo corte rematase en C: 2.° que sobre la base superior un corte rematase en *d*, en *d'*.... y sobre la base inferior el mismo corte rematase en *c*, *c'*.... Cada uno de los cortes de sierra es el lado de un polígono que representa el contorno de una curva espiral situada en la superficie espiral que hay que producir. *

* Con un cepillo muy delgado y de hierro circular, mantenido siempre en situacion horizontal, y no deteniéndose mas que en el corte de sierra en CD, y en la vertical en O, se fue quitando toda la madera supérflua para llegar á la superficie espiral superior de la rosca de Arquimides. *

* Esto hecho, por medio de una escuadra se pusieron á escuadra las caras de junta en OD y OC, con esta cara superior. Finalmente, tirando sobre las caras de junta y sobre el contorno CD, líneas rectas iguales en contra de las que limitan la cara superior de la rosca, se pudo trabajar la cara infertor con los medios que se han descrito para la cara superior. *

* Observemos aquí que un liston doblado sin esfuerzo sobre el contorno cilíndrico ABCD, de manera que pase por los dos puntos CD, indica por su contorno un arco perfecto de espiral ó de helice, lo que puede dar una grande exactitud por medio de la aproximacion que acabamos de indicar, dando muchos cortes de sierra horizontales, que rematen en el eje O por una parte, y por la otra, en la helice trazada por el medio del liston flexible. *

* No es indiferente observar que las juntas trabajadas á escuadra con la superficie espiral son elementos de superficie espiral del mismo género, por cuanto las últimas superficies trazan sobre los cilindros de base cir-

cular hélices que cortan en todas partes en ángulo recto las hélices que trazan las primeras superficies. *

Si se quiere que la parte de encima de las piezas de que se compone la rampa espiral tenga la figura de una *escalera*, es necesario dejar á la cara superior OCD su figura plana horizontal, y á la cara recta esterior OD su figura plana vertical, limitándose á trabajar, por los medios que hemos indicado, las superficies de las juntas, y la superficie inferior de la escalera: leccion décima.

Las mas veces, en lugar de construir una escalera circular, cuyos escalones van hasta el núcleo ó macizo O, como en la fig. 36, rematan los escalones en el círculo $a'b'c'$, fig. 37, que representa horizontalmente un reborde de madera ó de piedra, con muy poco vuelo por arriba y por debajo de cada escalon. Tales son las escaleras de caracol al aire.

Hay muchas escaleras de este género trabajadas con mucha precision en los mas bellos cafés de Paris. Estas escaleras que parece que nada las sostiene, sorprenden agradablemente la vista por su atrevimiento y su ligereza.

Hay escaleras al aire, fig. 38, cuya caja no es circular.

* Cualquiera que sea la base $ABCD_h$, fig. 38, del cilindro que representa esta caja se traza siempre en el contorno de la caja una hélice ó espiral que se adelanta en el sentido del contorno $ABCD^h$, proporcionalmente á la cantidad de que se levanta perpendicularmente. Despues desde cada punto de esta curva se tira una horizontal Aa, Bb, Cc.... perpendicular al cilindro que tiene $ABCD^h$ por base. Se hace Aa, igual á Bb, igual Cc.... y se traza *abcd*, que es tambien una espiral, ó bien el contorno interior de la rosca que forma la escalera. La ejecucion de cada parte de superficie espiral ó de escalera no presenta mas dificultades que las de las fig.s 36 y 37. *

Cuando se quiera dar á la escalera mucha solidez, las mas veces, en lugar de engendrar la superficie inferior por medio de una recta horizontal, apoyada á la vez en el eje de la caja, y en una espiral trazada á lo largo de ésta, la terminan con un arco de círculo, figura 39, que tiene dicha horizontal por diámetro, y está situada en un plano vertical. Fórmase de este modo una superficie espiral que presenta en toda su estension una seccion constante.

Ocurre en algunas artes cortar superficies espirales en escalones sobre un cono. Los relogeros combinan con el cilindro ó tambor que contiene el resorte de los reloges un cono cortado en escalera espiral, fig. 40. Una cadena muy fina artísticamente ejecutada se envuelve por un estremo sobre el cilindro en forma de hélice, y por el otro estremo sobre la escalera cónica. La relacion variable del diámetro del cilindro, y del diámetro del cono á diferentes alturas, compensa la diminucion de fuerza del resorte á medida que se afloja; y en consecuencia trasmite su accion con una energía constante. Esto se entenderá mucho mejor cuando hayamos esplicado los principios de las Máquinas. Volúmen 2.°

LECCION DÉCIMATERCIA.

Interseccion de las superficies.

Cuando dos superficies se cortan, todos los puntos que son comunes á una y otra es lo que se llama su interseccion, la cual es una línea recta ó curva, segun la forma y la posicion de dichas dos superficies.

Los cuerpos que estan terminados por posiciones de superficies distintas en figura y direccion, presentan en los límites de estas superficies líneas salientes ó entrantes, que son las intersecciones de dichas superficies. En el prisma y la pirámide, las aristas rectilíneas, que separan sus diferentes caras, son las intersecciones de las superficies que representan estas caras.

Cuando un cuerpo atraviesa á otro ó está introducido en él la superficie del primero está en parte oculta en el segundo: la parte oculta la separa de la parte descubierta una línea, la cual es la *interseccion* de la superficie del primer cuerpo con la superficie del segundo.

Así en la fig. 1, los dos prismas ABCD*abcd*, MNPQ*m'n'p'q'*, de los cuales el segundo atraviesa al primero, la interseccion es el contorno *mnpq* que separa en el segundo la parte visible y la parte oculta.

Para determinar la proyeccion horizontal y la proyeccion vertical de intersecciones de las superficies, la geometría descriptiva suministra métodos fáciles, de los que será muy útil hacer un estudio detenido, dibujando la interseccion de un gran número de superficies. Por ahora nos contentaremos con indicar sobre este asunto los medios generales de la ciencia.

La *interseccion* de los *planos* será nuestro primer estudio.

Para representar la interseccion de dos planos de proyeccion, el uno vertical y el otro horizontal, se divide el papel en dos partes por una horizontal AB, fig. 2: la parte del papel que está sobre esta línea representa el plano vertical de proyeccion, y la parte inferior representa el plano horizontal de proyeccion, que es ordinariamente el mismo plano del terreno. En este caso la interseccion AB de los planos es lo que se llama vulgarmente la *línea de tierra.*

Para que la representacion fuese perfecta seria necesario doblar á escuadra el papel, de manera que AB, señalando la direccion del dobléz, la parte inferior del papel quedase horizontal, y la parte superior estuviese vertical. Esto es al menos lo que debe hacerse con el pensamiento, y esto es lo que naturalmente hace nuestra imaginacion, cuando estan representados en los dos planos objetos cuya posicion conocemos. Así es que si vemos debajo de la línea de tierra la planta de un edificio, y encima la elevacion ó alzada del mismo edificio, con sus puertas, ventanas &c., aun cuando el papel en que está dibujada la planta y el alzado estuviese colocado en una mesa horizontal, enderezaríamos con el pensamiento la elevacion ó alzado del edificio, y la veríamos vertical. Por el contrario, si se pusiese el dibujo verticalmente, como para clavarle en una pared, no por esto dejaria de parecernos horizontal la planta, si representaba objetos tales como un parterre, un jardin, &c. Es necesario que los alumnos vean tambien en su verdadera situacion la proyeccion horizontal ó vertical de los volúmenes de las superficies, y de las líneas representadas encima y debajo de la *línea de tierra.*

Para indicar la posicion de un punto, que está fuera de dos planos de proyeccion, se tiran de este punto dos líneas rectas, la una perpendicular al plano vertical, y la otra al plano horizontal. Asi se señala la posicion del pie de estas perpendiculares sobre los dos planos de proyeccion.

A fin de abreviar mucho, y de facilitar la inteligencia de este medio de representacion, si P es el punto que hay que proyectar situado en el espacio, yo espresaré con P_v, fig. 2, su proyeccion vertical, y por P_h su proyeccion horizontal. Con esto las letras *v* y *h*, puestas debajo de una ó muchas letras, indicarán la proyeccion vertical, ó la proyeccion horizontal de los puntos, líneas, superficies y volúmenes indicados en el espacio con estas últimas letras.

Por el punto P, fig. 2 y 2 doble, situado en el espacio, pasemos un plano perpendicular á la línea de tierra AB, que será por lo mismo perpendicular á los dos planos de proyeccion; y por consecuencia contendrá las perpendiculares bajadas del punto P, la una sobre el plano vertical, y la otra sobre el plano horizontal de proyeccion. Construyendo un rectángulo, figura 2 doble, que tenga por lados las dos perpendiculares PP_v, PP_h, intersecciones del plano que las contiene con el plano vertical el plano y horizontal, se tendrá $MP_v = PP_h$, $MP_h = PP^v$. Finalmente si se hace dar vuelta al plano horizontal de proyeccion para que caiga sobre el papel que contiene el plano vertical, en este movimiento MP_v MP_h no dejarán de ser perpendiculares á la interseccion AMB de los dos planos de proyeccion. Así, *para que dos puntos* P_v, P_h, *fig.* 2, *sean respectivamente la proyeccion vertical y la proyeccion horizontal de un mismo punto* P, *es necesario que la recta* P_v P_h, *sea perpendicular á la linea de tierra* AB.

La parte MP_v de esta perpendicular es la distancia del punto P al plano horizontal, y la parte MP_h es la distancia del punto P el plano vertical.

Proyeccion de la linea recta. Cuando varios puntos forman una línea recta PQ todas las perpendiculares bajadas de estos puntos á un plano forman otro plano que corta en línea recta cada uno de los otros dos. Si, pues, se tienen solamente las proyecciones P_v P_h; Q_v, Q_h, figura 3, de los dos estremos de una recta PQ, uniendo con una línea recta los puntos P_v y Q_v, P_h y Q_h, se

tienen dos preyecciones de la línea recta PQ. *La interseccion de los planos es* la que da estas proyecciones.

Para representar un plano por el método de las proyecciones es necesario otro medio. He aqui el que se emplea.

El plano que se quiere representar corta cada plano de proyeccion en una línea recta, y corta á la vez estos dos planos en un punto M, fig. 4, situado en la línea de tierra. Llámanse *trazas* de un plano PMQ sus *intersecciones* PM, MQ, con los dos planos de proyeccion.

La posicion de un plano está completamente determinada por la de *dos líneas rectas que aquel contiene; luego las dos trazas de un plano bastan para conocer su posicion.*

Supongamos ahora que se trata de hallar la proyeccion vertical p_v, fig. 4, de un punto *p* situado en el plano PMQ, siendo conocida la proyeccion horizontal p_h de este punto. Ya se sabe que las dos proyecciones p_v, p_h, del punto *p* estan necesariamente en una perpendicular á la línea de tierra: tiremos esta línea. Por el punto *p* tracemos en el plano PMQ una horizontal, que será paralela á la traza horizontal PM; luego su proyeccion $p_h m_h$ será paralela á PM. Pero el punto m_h que está en la línea de tierra AMB no puede pertenecer mas que á un punto m_v situado en el plano vertical de proyeccion. Luego la perpendicular $m_h m_v$ á AB contiene el punto m_v cuya proyeccion horizontal es m_h. Ademas este punto está tambien en la traza MQ, luego está en m_v. Tirando despues $m_v p_v$ paralela á AMB, esta línea representa en el plano vertical la proyeccion de *mp*; luego la proyeccion vertical del punto *p* se halla á un tiempo en $m_v p_v$ y en $p_h p_v$. Luego está en el punto p_v, interseccion de estas dos líneas rectas. Por consecuencia, p_v es la proyeccion vertical del punto, cuya proyeccion horizontal es p_h.

Supongamos que las trazas MP y MQ, SR y ST, fig 5, de dos planos esten dadas, y que se pide la interseccion *de estos dos planos.* **1.°** El punto D_v que está en las dos trazas verticales, pertenece á esta interseccion, y como

está en el plano vertical de proyeccion, se proyecta en D_h sobre la línea de tierra AB; 2.° el punto E_h que está en las dos trazas horizontales, pertenece á la interseccion de los dos planos, y como está en el plano horizontal, su proyeccion vertical E_v está en la línea de tierra. Tenemos pues dos puntos de la línea recta en que se cortan los dos planos, á saber: primer punto D_v, D_h, segundo punto E_v E_h. Por consecuencia las proyecciones de la línea recta, á que pertenecen dichos dos puntos, son las dos líneas rectas D_vE_v, D_hE_h, que son la interseccion buscada.

Proyecciones de un polígono. Las proyecciones de un polígono cualquiera ABCDE, fig. 6, terminado con líneas rectas, son dos polígonos de un mismo número de lados, $A_vB_vC_vD_vE_v$, $A_hB_hC_hD_hE_h$, cuyos vértices correspondientes estan en las mismas verticales A_vA_h, B_vB_h, &c.

Siendo siempre la interseccion de dos planos una línea recta, cuyas proyecciones son tambien líneas rectas, se sigue que un cuerpo terminado por caras planas, lo está tambien por aristas rectilíneas que son las intersecciones de dichas caras. Represéntase este cuerpo dibujando sobre el papel las líneas rectas que son las proyecciones de cada arista. Los vértices que terminan en cada arista estan situados en la misma vertical en dos planos de proyeccion.

Así en la fig. 7, una pirámide SABC, está representada horizontal y verticalmente por las proyecciones de sus aristas, y los vértices correspondientes estan proyectados en S_v y S_h; A_vA_h; B_vB_h y C_vC_h sobre las rectas S_vS_h, A_vA_h, B_vB_h y C_vC_h perpendiculares á la línea de tierra MN.

Por medio de la *interseccion* de los planos y las líneas rectas, la geometría descriptiva enseña á determinar: la longitud de una línea recta, cuyas dos proyecciones se conocen, y la superficie de una figura plana, dada por las dos proyecciones de su contorno: el ángulo que forman dos rectas, cuyas proyecciones se conocen: el ángulo que forman dos planos, cuyas

trazas horizontales y verticales se conocen: la distancia mas corta de dos líneas rectas dadas por sus proyecciones: el ángulo que una recta dada por sus proyecciones forma con un plano, dado por sus trazas &c. En un curso de delineacion se debe enseñar á los alumnos la resolucion de estos problemas.

Con estos los artistas podrán hacer una multitud de aplicaciones á las artes mas importantes: á la arquitectura, al corte de piedras, á la carpintería, á la construccion de naves, de máquinas, de telares, &c.

No solamente dibujarán planos horizontales y proyecciones verticales de edificios, navíos, máquinas &c., sino que tambien podrán hacer fácilmente de estos objetos un *corte* por un plano cualquiera. El plano de este corte que encontrará las líneas rectas, dadas por sus proyecciones horizontales y verticales, producirá puntos y los ángulos que sabrán determinar. Los diversos planos dados por sus *trazas* tendrán una línea recta por interseccion con el plano del corte: los alumnos determinarán estas líneas rectas, y producirán la representacion fiel y completa de todas las partes del edificio que no sean curvilíneas.

El carpintero, por ejemplo, representará rigurosamente todas las partes del maderamen de un techo y de un entramado. Haciendo secciones y cortes tendrá las formas y dimensiones de cada pieza de madera, viga, carrera, cábio, cobija, &c. Estas diversas piezas rematan en caras planas y aristas rectilíneas; y se trazarán las proyecciones de estas aristas. Estas diversas piezas tocan la una con la otra, y las líneas que señala el lugar donde se tocan son la interseccion de las caras planas de las piezas de madera en contacto. Estas intersecciones se determinarán por los métodos sencillos que hemos indicado. Finalmente, todas las piezas de madera no estan en ángulo recto en todas sus caras, y así se medirán los ángulos formados por las diversas caras de una misma pieza, y por las caras adyacentes de diversas caras contíguas, y se hallará tambien la direccion, el

largo y el ancho de cada cara de las diversas piezas.

Siguiendo este método no hay duda que un buen carpintero práctico, por medio de las proyecciones y de los cortes, llegará á determinar rigurosamente todas las partes rectilíneas del maderamen de un edificio.

Resulta de esto que un carpintero ejercitado, que dibuja con inteligencia y perfeccion todas sus piezas y sus ensambladuras, posee en realidad conocimientos de geometría muy estensos. Poco importa que no dé á las líneas, á las superficies, á los sólidos, los nombres adoptados por los profesores, y consagrados en los libros, si la sustancia de las cosas es la misma. La ciencia no tiene menos utilidad ni menos valor por enseñarse en la lengua vulgar, y sin aparato didáctico.

Las observaciones que presento en razon de los conocimientos del carpintero puedo aplicarlas igualmente á los del cantero: el *cantero* tiene que preparar cada una de las piedras principales de que se compone un edificio construido con cuidado, dándole una forma tal, que puestas estas piedras unas al lado de otras, ó unas sobre otras en un orden determinado por las condiciones de duracion y solidéz, reproduzcan exactamente las formas dadas por el arquitecto en sus plantas y elevaciones. Teniendo las proyecciones horizontales y verticales el cantero, divide las paredes con varios planos que las corten, con esto, la forma de las piedras de sillería se halla determinada, 1.° por las caras esteriores é interiores de las paredes; y 2.° por los planos cortantes, planos de junta, llamados así porque en ellos se juntan las piedras que estan inmediatas.

Las piedras de sillería de las paredes verticales ordinarias son muy fáciles de trazar, puesto que son paralelipipedos, cuyas caras contiguas estan á escuadra, y todas las aristas opuestas son paralelas. Pero cuando las paredes tienen escarpa, y cuando forman unas con otras ángulos que no son rectos, es preciso labrar las piedras dándoles figuras mas complicadas; es preciso determinar los ángulos que forman las caras inclinadas

con las caras horizontales, los ángulos de las aristas que siguen la direccion de una pared con las aristas que siguen la direccion de la pared contigua &c. A veces la parte de arriba de las puertas y ventanas, aunque plana, está formada de muchas piedras puestas unas al lado de otras, pero mas anchas por arriba que por abajo, para que no se caigan por el efecto de su propio peso. En este caso es preciso tambien determinar los ángulos de las aristas y de las caras de estas piedras, y sus dimensiones, &c. Todos estos problemas se resolverán por medio de las *intersecciones.*

Enséñase á los alumnos, arquitectos, maestros de obras, aparejadores, &c. á cortar en yeso, con dimensiones proporcionales, modelos de bóvedas, puertas, ventanas, escaleras, &c., dando á cada piedra su figura conveniente, y determinando geométricamente las juntas y las aristas de cada piedra. Semejante ejercicio no se puede ponderar ni recomendar lo que pide su importancia. Sería de desear que en su enseñanza se dispusiesen los cortes que hay que hacer, por el orden de las superficies planas, cilíndricas, cónicas, evolvibles, gauchas, de revolucion &c., que hemos adoptado en nuestro curso; sería bueno tambien que se enseñase á cortar modelos de carpintería, como los del corte de piedras, medio que haria la instruccion mas frutuosa y mas rápida.

Interseccion de las líneas rectas y de los planos con las superficies curvas. Distribuiremos estas superficies en el mismo orden con que las hemos examinado, y para esto estudiaremos sucesivamente las intersecciones de la línea recta y del plano con las superficies cilíndricas, cónicas, evolvibles, gauchas, de revolucion, &c.

Proyecciones del cilindro. Para esto descríbase en uno de los planos de proyeccion, por ejemplo, en el plano horizontal, la *traza*, ó la interseccion del cilindro con este plano. Observemos despues, que siendo paralelas todas las aristas del cilindro, sus proyecciones son necesariamente paralelas. Una vez determinada,

fig. 9, la direccion C_hc_h, C_vc_v de las dos proyecciones de una arista, se tendrá por consiguiente la direccion de las proyecciones de todas las demas aristas. Por lo comun no se hace mas que señalar en proyeccion horizontal y vertical las aristas estremas A_va_v y E_v e_v; B_hb_h, D_hd_h.

Interseccion del cilindro con un plano. Sabemos como se determina la interseccion de una recta con un plano, cuando se conocen las trazas del plano, y las proyecciones de la recta. Si se efectua esta operacion con las diversas aristas del cilindro, cada una de ellas dará un punto de interseccion, que se proyectará horizontal y verticalmente. La reunion de estos puntos forma una curva horizontal, y otra vertical, que son las dos proyecciones de la *interseccion* buscada.

En las operaciones de las artes es muy comun trazar las intersecciones sobre las mismas superficies, presentándolas la una contra la otra. Supongamos por ejemplo, fig. 10, que el cilindro sea un cañon de estufa que tenga ya su forma cilíndrica, y que el plano sea una hoja de hierro que ha de atravesarla el cañon. Se colocará el cañon en la direccion misma que ha de tener; pero retirándole lo bastante para que no tropiece con el plano que ha de atravesar. Esto hecho, mantengamos una regla, puesta siempre junto al cilindro, en la misma direccion de las aristas de esta superficie. Acerquemos ó retiremos la regla hasta que por un estremo toque en la hoja de hierro. Finalmente, en cada posicion de esta regla señalemos donde remata esta en la hoja; la reunion de los puntos determinados de esta suerte será la curva de interseccion de las dos superficies.

Supongamos que se señala en la regla cierta longitud constante, tomándola desde el estremo que toca siempre á la hoja de hierro, y que tocando á este punto se señala otro en el cilindro ó cañon; los muchos nuevos puntos, señalados de esta suerte, formarán una curva, que es la *interseccion del cilindro con un plano.*

Si transportamos paralelamente ó la hoja de hierro ó el cilindro, en virtud de la igualdad de las paralelas comprendidas entre paralelas, las dos curvas que se acaban de trazar, la una sobre el plano, y la otra sobre el cilindro, se aplicarán exactamente una á otra y se confundirán. Trazadas estas dos curvas, se cortará por su contorno, sea el cilindro, sea la hoja plana, ó las dos superficies á la vez, segun lo pida el objeto á que estas superficies estan destinadas.

Este método tiene la ventaja de ser exacto, cualquiera que sea la figura del cilindro, y aun cuando la hoja de hierro, en lugar de ser plana, tenga una figura curva cualquiera.

Aplicacion á la construccion de las naves. Los carpinteros emplean este método para trazar inmediatamente la curva de interseccion de la superficie de la proa, y de la superficie de los puentes con la de los mástiles, y para las fogonaduras.

Aplicacion de las intersecciones de cilindros á las proyecciones de las sombras (1). Cuando una superficie terminada por aristas vivas intercepta los rayos de la luz del sol, si se tira por cada punto del contorno de esta superficie una paralela á los rayos solares, todas estas paralelas forman un cilindro, que separa mas allá de la superficie la parte de la sombra, y la parte iluminada. Si detrás del cilindro hay un cuerpo que todo él está comprendido en esta sombra, el sol está totalmente oculto ó *eclipsado* por la superficie que proyecta sombra; pero si el cuerpo no tiene mas que una parte en la sombra, y se determina la interseccion de la superficie de este cuerpo con el cilindro, la curva determinada así, *separará* en el cuerpo la parte que está en la sombra, y la parte iluminada. De este modo resulta una *línea de separacion de sombra y de luz,* en el cuerpo opaco, por medio de la curva de *interseccion*

(1) *A esto llaman entre nosotros* esbatimentos.

de la superficie de este cuerpo con el cilindro que señala en el espacio el límite de los rayos solares interceptados por la superficie opaca.

Si tomamos una regla, y la mantenemos siempre paralela á los rayos solares, apoyándola por un lado contra la superficie que proyecta la sombra, y por el otro sobre el cuerpo en parte iluminado, cada posicion de la regla marcará un punto en este cuerpo, y la reunion de todos ellos será la línea de separacion de sombra y de luz.

Es menester que los dibujantes, los pintores y los grabadores se formen una idea exacta de los cilindros que proyectan las sombras de los cuerpos, y para esto les sería muy útil determinar rigurosamente con los métodos de la proyeccion, y de las intersecciones de las superficies, la figura de las sombras (ó esbatimentos) de muchos cuerpos, en varias posiciones y de varias formas sobre otros cuerpos, que tambien tengan diferentes posiciones y formas. Con esto adquiririan esperiencia cierta de los efectos de la luz solar, relativos á la figura de las sombras; y este conocimiento les impediria el caer muchas veces en faltas groseras, que hubieran evitado con un poco de geometría aplicada á su arte.

La exactitud de las sombras es sobre todo importante en los planos de arquitectura, donde todos los objetos representados, como paredes, columnas, bóvedas, &c. tienen formas geométricas rigurosas. Es pues necesario, que el arquitecto que quiere sombrear sus planos, y juzgar por ellos de los efectos de sombra y de luz, que sus construcciones han de producir, se habitúe á determinar todas las sombras proyectadas ó *esbatimentos* con la mas escrupulosa exactitud.

En los planos de arquitectura, y en el dibujo de las máquinas, se supone que los rayos solares estan inclinados á 45° bajando de izquierda á derecha. Cuando se dibujan los objetos con líneas sin lavarlos, se señalan con líneas mas gruesas los contornos que pertenecen

á las caras situadas en la sombra, y con líneas mas finas los que separan las caras iluminadas. Esta sencilla indicacion es lo que basta para dar á conocer los relieves y los huecos, que sin esto podrian confundirse á la vista de los simples dibujos hechos con líneas.

Así, fig. **11**, con solo ver los lados sombreados y los lados iluminados, yo distingo al punto en ABCD un cuadro en relieve, y en *abcd* un cuadro en hueco. Será bueno que los alumnos que dibujen los edificios y las máquinas se habituen á señalar con inteligencia las líneas delgadas y las líneas gruesas, puesto que confundiéndolas podríamos tomar por relieve lo que es hueco, y esto por aquello.

Aplicacion á la perspectiva. Cuando hay que poner en perspectiva un dibujo de arquitectura *sombreado* es preciso determinar el punto de concurso de todos los rayos paralelos, segun el método general de los puntos de concurso, que queda espuesto en la leccion novena. Luego que se tenga la perspectiva de un punto cualquiera (**1**) si se unen en el cuadro este punto con el punto de concurso se tendrá la perspectiva del rayo que pasa por el punto dado, ó si el punto es opaco, la perspectiva de la sombra arrojada por este punto. La sombra ó esbatimento de una curva cualquiera, puesta en perspectiva, serán varias líneas rectas, que todas se encontrarán en el punto de concurso, como las aristas de un cono.

---

(1) *Suele suponerse vertical el plano* PMQ, *fig.* 8, *del cuadro, en cuyo caso siendo* X^vS^v, X^hS^h *las dos proyecciones de una línea recta, y* x^h *la interseccion de* X^hS^h *con la traza horizontal del plano, basta tirar la vertical* x^hx^v, *y será á* x^v *la altura del punto sobre una vertical levantada desde* x *en el cuadro. Este método es lo que basta para determinar la interseccion de todo rayo tirado del punto de vista, y por consecuencia la perspectiva de todos los puntos de una figura dada.*

Intersecciones del cono y del plano. Estas intersecciones, llamadas especialmente *secciones cónicas*, cuando se hacen en un cono circular oblícuo ó recto, son de la mayor importancia para la ciencia y las artes. Su estudio solo constituye como el de los triángulos un ramo separado y considerable de la geometría, y es, por decirlo así, un intermedio para pasar de la geometría elemental á la geometría sublime.

Yo no puedo hacer aqui otra cosa que indicar en muy pocas palabras las formas esenciales de las secciones cónicas y sus principales aplicaciones.

Determínanse las proyecciones horizontales y verticales de la interseccion del cono con un plano, del mismo modo que se hizo en el cilindro, esto es, que se determina la proyeccion horizontal y vertical de la interseccion de este plano con cada arista del cono, de lo que resulta en cada plano de proyeccion una curva, que es la proyeccion buscada.

Tomemos el cono mas sencillo y mas regular, cual es el cono recto circular, fig. 12. Todas las secciones de este cono con los planos paralelos de la base son *círculos* como la base. Ya hemos esplicado las propiedades del círculo y de su circunferencia (leccion tercera.)

1.° La *elipse.* Si se corta el cono con un plano PQ, fig. 12, oblícuo al eje, y este plano encuentra á todas las aristas, *la seccion cónica* producida así, es una elipse curva cerrada por todas partes. He aqui las principales propiedades de la elipse.

La elipse tiene un *centro* O, fig. 13, y dos ejes AB, CD, que se cruzan en ángulo recto. Toda línea SOT, tirada por el centro O, y terminada en el contorno de la elipse, está dividida por el centro en dos partes iguales, y es un *diámetro* que divide la elipse en dos partes, una de las cuales puede *cubrir* exactamente á la otra, volviendo el diámetro al otro lado.

Como cada uno de los dos ejes divide la elipse en dos partes simétricas, toda perpendicular MPN á uno de los ejes AB, queda dividida por este eje en dos partes iguales PM, PN. Por consecuencia, si hacemos girar la semi-elipse ACB, sobre AB como charnela, todos los puntos del contorno ACB se aplicarán inmediatamente á los puntos del contorno ADB.

Si el centro de la elipse es tambien el de un círculo, cuyo diámetro sea el eje AB, prolongando OD y PN hasta *d* y *n* en el círculo, se tendrá siempre la proporcion OD : O*d* : : PN : P*n*, que se verificará en todas las rectas PN*n* paralelas al eje COD. Así la elipse puede considerarse en un sentido como un círculo aplanado proporcionalmente en todas sus partes.

Por el contrario, si se traza el círculo C*b*D, fig. 13, sobre el eje menor CD como diámetro, se tendrá la proporcion siguiente para toda línea recta F*g*G perpendicular al eje CD, terminada en *g* en el círculo, y en G en la elipse, O*b* : OB : : F*g* : FG.

Resulta de esto que la elipse puede considerarse en un sentido como un círculo *prolongado* proporcionalmente en todas sus partes.

Teniendo trazado un círculo en un plano inclinado, representado por la recta AB, fig. 14, se pide su proyeccion en un plano horizontal.

* Sea *ab* la proyeccion del diámetro AB, el cual sea el mas inclinado de todos. Siendo *o* la proyeccion del centro O, si se tira *cod* perpendicular á *ab*, y se hace *oc* = OC = al rádio del círculo, la curva *acbd* que es una *elipse*, será la proyeccion de este círculo. En efecto, si tiramos la perpendicular cualquiera MN, al diámetro AB, del círculo trazado en el plano AB, la horizontal MN estará en el plano del círculo, y por consecuencia es igual á su proyeccion *mn*. Así las perpendiculares estarán mas cercanas al eje mayor *cod* que las perpendiculares MN lo estan al rádio CO, en la razon de OM á *om*. Luego la proyeccion del círculo no es otra cosa mas que este círculo aplanado proporcionalmente en todas sus partes, ó bien una elipse: de donde podemos inferir que*

Siempre que se proyecta un círculo en un plano que

no es paralelo á aquel, la proyeccion es una elipse, y el eje mayor de esta elipse es igual al diámetro del círculo.

No puedo estenderme sobre una multitud de propiedades de la elipse, pero hay una que no se debe omitir, á causa de sus aplicaciones tan numerosas como importantes.

Si señalamos dos puntos fijos F y *f*, fig. 15, con dos piquetes ó jalones, á los cuales se ata un cordel mas largo que la distancia E y *f*; y despues con un puntero se tiene tirante dicho cordel, caminando ya del lado de F y ya del lado de *f*, se describirá una curva que es la elipse. Llámase *elipse ú óvalo de jardinero*, porque el jardinero traza de esta manera las elipses ú óvalos de los parterres.

Una propiedad muy notable de la elipse es que en cada uno de sus puntos C, las dos porciones rectilíneas del cordel FC y *f*C, forman en C el mismo ángulo con la curva ó su tangente *t*CT (1).

Aplicacion á la óptica. La esperiencia ha enseñado que un rayo de luz FC, que viene á caer en una curva ó superficie ACB, toma otra direccion C*f*, ó como se dice, se *refleja* segun C*f*, de manera que los dos rayos

---

(1) *Para demostrarlo, en* FC *prolongada, tomemos* Cg = Cf, *y tracemos* fg. *Tiremos la recta* TCt *perpendicular á* fg. *Siendo iguales las oblícuas* Cf *y* Cg, *será el ángulo* fCT = gCT = FCt. *Ademas, en un punto cualquiera* t *de* CTt, *la suma de las distancias* Ft + ft = Ft + tg *de la linea angulosa, es mayor que la linea recta* FCg = FC + fC. *Luego el punto* t *está fuera de la elipse. Asi la recta* TCt *no puede tocar á la elipse mas que en* C, *lo que prueba que es una* tangente. *Luego la tangente de la elipse en* C *forma el mismo ángulo con los dos rádios vectores. El mismo género de demostracion se aplica á la propiedad de las tangentes de la parábola y de la hipérbola, de que se habla despues.*

FC y C*f* forman un mismo ángulo con la curva ó la superficie. Luego si la elipse refleja la luz como un espejo plano, todo rayo luminoso FC, emanado del punto F, debe reflejarse en la direccion C*f*, que pasa por *f*.

Llámanse *focos* los dos puntos F*f*. Asi *todos los rayos de luz emanados de un foco, y reflejados por el contorno de la elipse, pasan por el otro foco.*

Aplicacion á la acústica. El sonido, como la luz, se propaga en línea recta, y se refleja tambien en línea recta, formando un ángulo de reflexion igual al ángulo de incidencia. Por consecuencia, si el contorno de la elipse está construido de manera que refleje el sonido, todos los sonidos emanados del foco F se reflejarán al pasar por el otro foco *f*, que será un eco de F.

Se han construido en forma de elipse, fig. 15, algunas salas donde la esperiencia ha comprobado la teoría. Si se habla con voz baja en el foco F, de manera que no se pueda oir en O, el efecto del eco hace sin embargo que las palabras pronunciadas con voz baja en F, sean muy inteligibles en el otro foco *f*.

Se ha hecho una aplicacion deplorable de esta propiedad que tienen los ecos. Alguna vez ha habido quien construyese cárceles en donde los presos encadenados hácia un foco F no podian proferir la menor palabra sin que no se les oyese en el otro foco *f* de una bóveda elíptica, separada de F por un tabique que no permitia que el encarcelado viese á quien le estaba escuchando.

Los planetas corren alrededor del sol curvas que son *elipses* que tienen uno de sus focos en el centro del sol. Treinta siglos de estúdios de la astronomía y de la geometría han sido necesarios para descubrir esta verdad de esperiencia, que ha preparado los mayores y los mas bellos progresos de la astronomía moderna.

Si se hace girar la elipse alrededor del eje mayor AF*f*B que pasa por los dos focos, se formará una superficie de revolucion que tiene la propiedad de que todo rádio luminoso ó sonoro FC, que sale del foco F se refleja, siguiendo una línea recta que pasa por el otro foco *f*.

Así como en el círculo prolongado ó aplanado proporcionalmente en todos sus puntos se construyen todas las elipses, así tambien con el elipsoide de revolucion descrito, haciendo girar una elipse en uno de sus ejes, se pueden ejecutar todas las superficies elipsoides prolongadas ó aplanadas. Basta aquí indicar este medio sin entrar en otros pormenores.

Hay una manera de trazar la elipse con un movimiento contínuo que los artistas emplean algunas veces. Sean AOB, COD, fig. 16, los dos ejes; tírese una recta MNP = OA en la prolongacion, de la cual se toma PN = OC. Quedando fijo el punto M en el eje menor prolongado, si es necesario, y el punto N en el eje mayor, hágase adelantar ó retroceder dicha línea recta, en todas las posiciones posibles, y su estremo P trazará la elipse ABCD.

Por este principio se han construido instrumentos para trazar la elipse con un movimiento contínuo, los cuales son realmente *compases elípticos*

Yo he hecho ver en una memoria (Diario de la Escuela politécnica, tom. 13) como este género de descripcion con un movimiento contínuo puede aplicarse al trazado de una superficie elipsoide cualquiera, por medio de una línea recta, en la que tres puntos determinados permanecen siempre sobre tres planos fijos, en tanto que otro que va ó viene adelante ó atrás en todos sentidos describe una superficie elipsoide. Este método puede tener su aplicacion á los trazados y obras que ocurren en la construccion de las bóvedas elípticas.

II. *La parábola*, fig. 17, está trazada en el cono ABO, *ba* con un plano QR, paralelo á una de las aristas del cono, y es una curva *mnp* cerrada por un lado, abierta por el otro, y se estiende al infinito, apartándose cada vez mas sus dos ramos *mn*, *np*.

La parábola MNP, fig. 18, no tiene mas que un eje NL, con respecto al cual sus dos ramos NM, NP son simétricos. Tiene un *foco* F.

Prolonguemos el eje una cantidad NG = NF, distancia del foco al vértice de la parábola, y tiremos por el punto G la recta XY perpendicular al eje. Si prolongamos el rádio reflejo IK hasta H sobre XY, el punto I de la parábola estará igualmente distante del foco y de XY, de manera que FI = HI. Se toma una escuadra EHI que resvale á lo largo de XY; y con un cordel atado en el ángulo recto H, de manera que siempre esté estendido en línea recta, á lo largo de HI, y con otro cordel fijo, en el foco F, por un estremo reunido en I al primero de manera que FI = IH, dejando correr igualmente estos dos cordeles, á medida que la escuadra se aparta del eje, el punto I describe la *parábola*.

Suponiendo que la elipse se prolongue cada vez mas, sus dos focos se separan el uno del otro. Si se mantiene fijo uno de los focos, la porcion de elipse que se estiende alrededor de este foco se asemeja cada vez mas á la parábola, y al fin llega á confundirse con esta última curva.

Los cometas describen curvas que parece son parábolas, en las que el sol ocupa el foco; y son elipses muy prolongadas.

En la elipse prolongada los rayos vectores, tirados del foco que se separa hácia el otro foco, se aproximan cada vez mas á ser paralelos, y lo llegan á ser en la suposicion de que los dos focos estan infinitamente distantes uno de otro. Entonces la elipse es rigurosamente una parábola, y los rayos emanados de un foco los refleja esta curva, de manera que no encuentran el eje sino al infinito, donde se supone el otro foco. Luego en la parábola los rayos que salen del foco estan reflejados por la curva paralelamente al eje.

Hácese uso de la parábola, para recibir la luz que viene de un foco, y reflejarla en manojos de rayos paralelos al eje, en vez de esparcirse hácia todos los puntos del espacio.

Aplicacion á los faros. En las orillas del mar, á la entrada de los puertos, y á la embocadura de los rios, encima de los parajes peligrosos ó en su cercanía, se hacen hogueras ó se ponen luces, que importa se vean

á la mayor distancia posible. Tales son las luces de los faros. Pónense en el foco de la superficie de cobre plateada, á la cual se da la figura de una parábola que dá vueltas alrededor de un eje, fig. 18. Dicha superficie es el *paraboloide de revolucion*. En virtud de esta difinicion, todos los rayos que refleja esta superficie, á que llaman reflector paraboloide, forman un manojo de rayos paralelos, cuya base es el círculo paralelo ABCD, que forma tambien la base de la superficie ABCDN del reflector.

Unas veces el paraboloide esta situado en una posicion fija, y en este caso no se puede ver el fanal por la noche á una gran distancia, sino al tiempo de pasar por el eje del paraboloide. Otras veces el paraboloide da vueltas en un eje vertical, y entonces envia gradualmente sobre todos los puntos del horizonte la luz que refleja, y los navegantes conocen por las apariciones y desapariciones de la luz que no es algun fuego que hay allí por casualidad. La duracion de los intervalos de luz y de obscuridad presentan diferencias que sirven para distinguir los faros que hay en una misma costa de la mar.

III. *Hipérbola*. Es la seccion *mnp*, *m'n'p'*, fig. 19, formada en el cono, con un plano que corta los dos cascos AOB, *aOb*, la cual presenta dos partes separadas, y cada una de ellas tiene dos ramos como la parábola, diferenciándose de ésta en que los ramos de hipérbola se separan mucho mas rápidamente; de suerte que en la hipérbola mas cerrada, que tenga el mismo eje y vértice que la parábola, los dos ramos de la hipérbola llegan al fin á salir de entre los ramos de la parábola.

La hipérbola ABC, *abc*, fig. 20, tiene dos ejes y dos focos F, *f*, como la elipse, mas en vez de ser *constante la suma* de los rádios rectores, lo es su *diferencia*. Los dos rádios FM, *f*M forman tambien el mismo ángulo con la curva; mas ésta en vez de abrazar los dos rádios rectores como la elipse, pasa entre los dos &c. Finalmente hay dos líneas rectas XO*x*, ZO*z*, que forman el mismo ángulo con el eje mayor FO*f*, y que sin poder encontrar jamás los dos ramos de la hipérbola

se acercan tanto mas cuanto mas se separa del centro O por el cual pasan. Llámanse los *asintotas* de la curva.

Interseccion del cono con las superficies curvas. Para determinarla basta que pasen por el vértice del cono varios planos, los que le cortarán por aristas rectilíneas; y cortaran las superficies curvas por otras líneas cuyas intersecciones con dichas aristas serán los puntos de la curva buscada.

Aplicaciones á la óptica. Segun queda esplicado, leccion novena, los objetos aparecen á nuestra vista por medio de rayos luminosos, que cada uno de sus puntos envia al centro de nuestro ojo. Cada línea que proyecta estos rayos luminosos viene á ser la base de un cono; y si se traza la interseccion de este cono con la superficie que se toma por cuadro, resultará la perspectiva de la línea iluminada.

Ordinariamente los cuadros son superficies planas, como lo hemos supuesto en la leccion novena, pero algunas veces son cilindros semiesféricos.

Panoramas. Ha ocurrido la idea de formar cuadros cilíndricos, situado el punto de vista en el eje mismo del cilindro: por este medio se ha logrado representar en el contorno del cilindro todos los objetos de la naturaleza que se presentan circularmente hasta el horizonte alrededor de un punto dado. Tales son los *panoramas*, cuyo nombre significa *vista universal*, porque hacen ver en efecto *todos* los objetos que se pueden describir desde un solo punto. Así el trazado de los panoramas no es mas que la interseccion de la superficie cilíndrica, que forma el cuadro, con una ó muchas superficies conocidas que tienen su vértice en el punto de vista y por base todas las líneas de la naturaleza que el artista se propone representar.

A fin de simplificar la ejecucion de este género de perspectiva se divide el horizonte en muchas partes, por ejemplo, en veinte. Se dibujan en pliegos de papel la vista perspectiva de los objetos comprendidos en cada vigésima parte del horizonte. Despues se pintan

unas al lado de las otras en una tela que representa el desenvolvimiento de la superficie del cilindro que forma cuadro, las veinte fajas verticales y paralelas, y por último se cuelga la tela sobre la pared cilíndrica de la rotunda que ha de contener el panorama.

La verdad de este género de pintura, cuando está bien ejecutado, sorprende al espectador de tal manera que produce algunas veces todas las ilusiones de la misma naturaleza. No hay ningun otro medio de representacion que haga conocer mejor el aspecto general de un sitio alrededor de un punto dado, ventaja que no podria tener un plano en relieve, ni la perspectiva plana de una parte del oriente.

Espejos mágicos. Despues de los panoramas, la analogía de las concepciones geométricas nos hará recordar un juego de física bastante notable, que tiene por objeto trazar en un plano figuras tales, que reflejadas por espejos cilindros ó cónicos vienen á pintarse en el ojo del espectador de manera que representan objetos regulares y formas naturales. Para trazar estos objetos en el plano es preciso concebir: **1.°** todas las aristas de los conos que ponen cada objeto en perspectiva sobre el espejo, y 2.° los rayos reflejos considerando estas aristas como rayos incidentes. Cada rayo reflejo en su interseccion con el plano da un punto; y la reunion de los puntos determinados así es la figura que se deseaba dibujar. El placer que se encuentra en semejante espectáculo nace de la sorpresa que se esperimenta al ver las formas mas irregulares, mas caprichosas, y muchas veces, feas ú horribles, trasformadas por la reflexîon de la luz, y convertidas en un momento en formas regulares elegantes, y que setisfacen á nuestras ideas de decencia y de belleza.

Perspectivas pintadas en las cúpulas. En los grandes edificios, como los templos y los palacios, las bóvedas y las cúpulas, suelen estar adornadas con perspectivas, cuyo trazado se forma por la *interseccion de las superficies cónicas*, con las superficies de las mis-

mas bóvedas y cúpulas. En tal caso es muy importante que el artista haga un estudio profundo de estas perspectivas, á fin de que los trazados, que vistos de cerca, pueden diferenciarse mucho de las formas y posiciones de la naturaleza, considerados del punto de vista, aperezcan con las formas y en las posiciones que les son propias.

Sombras cónicas. Cuando un punto luminoso, como una hacha, una vela, un manojo de rayos de luz que pasa por un egujero pequeño, iluminan objetos opacos, arrojan la sombra de estos objetos de manera que en el espacio es una superficie cónica que separa la sombra de la luz: si se desea trazar la sombra que un cuerpo iluminado por un solo punto arroja sobre otro, es preciso determinar la *interseccion de esta superficie cónica*, dada por el cuerpo que arroja sombra, con el cuerpo en el cual cae la sombra.

Con este motivo, como con el de las sombras formadas por rayos paralelos, advertiremos á los principiantes en la pintura la gran ventaja que hallarán en determinar de antemano, por los métodos geométricos, muchas sombras arrojadas de este género, para abituarse á las formas que resultan de ellas, y juzgar bien de los efectos de la luz, en cuanto á la figura de las sombras, lo que aumentará mucho la verdad de sus producciones.

Siguiendo un método análogo al que acabamos de indicar se hallarán: **1.°** las intersecciones de las superficies evolvibles ó gauchas con otras superficies que determinan los puntos, donde encuentran á estas últimas, cada una de las rectas, que son las *aristas* de las primeras; 2.° las intersecciones de las superficies de revolucion con las otras superficies, buscando los puntos donde cortan á estas últimas los *círculos paralelos* trazados en las primeras, &c.

En todas estas operaciones el principal talento del artista consistirá en escojer bien los planos de proyeccion, á fin de que las proyecciones de las líneas generatrices de cada superficie sean curvas, sencillas y fáciles de trazar.

LECCION DÉCIMACUARTA.

De las tangentes y de los planos tangentes á las curvas y superficies.

Muchas veces para facilitar nuestras concepciones y nuestras demostraciones sustituimos á una curva ABCDEFGH, fig. 21, un polígono rectilíneo, cuyos lados muy pequeños AB, BC, CD, DE...., se acercan mucho al elemento de curva, comprendido entre estos diferentes puntos.

Si por dos puntos A, B, que se suponen señalados en la curva, tan cerca uno de otro, como nos sea posible hacerlo, tiramos la línea recta XABY, se confundirá ésta, por decirlo así, con la curva, en el corto espacio que separa los dos puntos A y B, y señalará la direccion de esta parte pequeña de la curva ABCDEFGH. En tal caso diremos que le recta XABY es *tangente* á la curva en el pequeñísimo elemento AB.

Observemos bien que esta manera de hallar las tangentes de una curva, no es mas que aproxîmada. Tratemos con un ejemplo sencillo de formarnos una idea rigurosa de las verdaderas tangentes.

En el círculo ABC, fig. 22, tiremos el rádio OA, y despues por el estremo A la perpendicular XAY á este rádio. Hemos demostrado que (leccion tercera) cualquiera punto de XAY, que no sea A, se halla fuera del círculo. La recta XAY, que toca al círculo en un solo punto, es la que hemos llamado la *tangente* del círculo.

Por el punto A no se puede hacer pasar ni á derecha ni á izquierda una línea recta entre la tangente y el círculo XAY. En efecto, tiremos por el punto A una línea cualquiera AZ; y despues ON perpendicular á AZ.

Esta perpendicular ON será necesariamente menor que la oblícua OA. Luego AZ pasará dentro del círculo, y por consecuencia desde A no pasará entre el círculo y la tangente XAY.

Como una porcion muy pequeña del círculo, contando desde la tangente, sigue la misma direccion que ésta, por eso se puede considerar un punto sumamente cerca de A, tomado en el círculo como situado en la tangente; lo que basta para indicar su direccion, y de una manera tanto menos inexacta, cuanto el segundo punto esté mas cerca al primero.

El rádio OA, perpendicular á la tangente XAY es tambien perpendicular al elemento de curva que desde A sigue la misma direccion que la tangente. Llámase *normal* esta perpendicular á la tangente, y por tanto el *rádio del círculo es normal á la circunferencia.*

Las artes hacen uso continuamente de las propiedades de las tangentes y las normales, para dar una forma determinada á los contornos de las líneas y superficies.

Veamos primeramente como se trazan los polígonos regulares con las tangentes del círculo.

Sea un polígono regular cualquiera $abcdef$...., fig. 23. Sea O el centro de este polígono, y será $Oa = Ob = Oc = Od$...., y tambien $ab = bc = cd$.... Luego los triángulos aOb, bOc, cOd...., son iguales; luego las perpendiculares OA, OB, OC...., bajadas de O sobre ab, bc, cd...., son iguales entre sí; luego un círculo descrito desde el punto O como centro, con el rádio $OA = OB = OC = OD =$...., tiene por *tangentes* todos los lados del polígono regular $abcde$....

Dícese que el polígono $abcde$.... está circunscrito al círculo ABCD. Así todo polígono regular puede estar *circunscrito á un círculo.*

Es fácil ver: 1.° que la circunferencia del círculo es mayor que el contorno de todo polígono inscrito ABCD, y menor que el contorno de todo polígono circunscrito $abcd$; 2.° que la superficie del círculo es mayor que

la de todo polígono inscrito, y menor que la de todo polígono circunscrito.

Multiplicando mucho los lados de los polígonos inscritos y circunscritos al círculo que tiene la unidad por rádio, se han podido calcular dos contornos que se diferenciasen el uno del otro menos que una longitud mensurable con nuestros instrumentos, y tales sin embargo que uno de los contornos fuese mayor, y el otro menor que la circunferencia del círculo.

Del mismo modo se han hallado polígonos regulares que el uno tenga la superficie mayor y el otro menor que la del círculo, y diferenciándose entre sí menos que toda magnitud dada de antemano. Así es como se espresan con números de una grande aproxîmacion, la circunferencia y la superficie de un círculo, que tienen la unidad por rádio.

Se puede emplear el mismo método para determinar el contorno y superficies de un espacio terminado por cualquiera otra especie de curvas.

Este método notable, llamado por los geómetras *método de los límites*, dá la demostracion rigorosa de un gran número de evaluaciones y de principios matemáticos que hemos presentado como aproxîmaciones, que no se apartan de un modo sensible de la verdad.

Cuando se desea cortar una superficie, tal como una hoja de hierro, para que tenga el contorno de un círculo ABCD, fig. 23, se empieza trazando con las tangentes un polígono circunscrito al círculo, y despues con un cepillo, una lima, un escoplo, ó cualquiera otro instrumento rectilíneo se cortan los ángulos *a*, *b*, *c*, *d*.... Con esto se forma un polígono que tiene doble número de lados, y se diferencia mucho menos de la circunferencia del círculo. Continuando en cortar así los ángulos se forma un polígono, cuyos lados son tantos y tan pequeños, que los vértices y los ángulos llegan á ser imperceptibles, y el círculo parece perfectamente ejecutado.

En la construccion de las puertas, ventanas y bóve-

das de medio punto, y apuntadas, los pies derechos AM, CN, fig. 24 y 25, son verticales y perpendiculares al rádio horizontal, AO=OC, fig. 24, y AC, fig. 25. Por consecuencia estos pies derechos son *tangentes* al arco en A y C.

En la bóveda rebajada ABCD, fig. 26, hay tres arcos de círculo AB, BC, CD, cuyos centros *m*, O, *n*, estan dispuestos así.

*1.° O, *m* y el punto B de union de los arcos AB y BC estan en línea recta; 2.° O, *n* y el punto C de union de los arcos BC y CD estan en línea recta. Luego si XBY es perpendicular á O*m*B, y si ZCT es perpendicular á O*n*C, estas dos líneas serán á la vez tangentes, la primera á los arcos AB y BC en B, y la segunda á los arcos BC y CD en C.*

* Como los arcos de círculo trazados así tienen la misma tangente, no presentan ningun ángulo, ningun codo, ningun garrote en el punto de su union.*

Siempre que se quiere sustituir á una curva contínua arcos de círculo que se acerquen lo mas que sea posible, y que reproduzcan su continuidad, es preciso que estos se unan de manera que tengan la misma tangente en su punto de union. Esto se entenderá mejor en la leccion siguiente.

Planos tangentes de las superficies. Paralelamente á un plano dado hagamos en la superficie AGB..., fig. 27, varias secciones planas AB, CD, EF...., las cuales irán siendo menores á medida que se acerquen á los límites de la superficie, y se llegará por último á un punto G, que solo él estará en un plano MN, paralelo á todas las secciones.

Tracemos sobre la superficie diversas curvas AGB, *a*G*b* que pasen por el punto G, y tírense en este punto tangentes á dichas curvas. No pudiendo pasar ninguna recta entre las tangentes y las curvas será preciso que estas tangentes esten situadas en el plano MN.

Por consiguiente todo plano tangente en G á la superficie AGB contiene *todas* las rectas tangentes en G á

las diversas curvas trazadas por este punto en esta misma superficie. Sin embargo, deben esceptuarse los *puntos singulares*, como son el vértice del cono &c., bien que estos puntos son siempre escepciones en las superficies.

Tomemos la esfera por ejemplo del caso general. Las secciones paralelas AB, CD, EF, fig. 28, son círculos cuyos centros $o,o,'o''$ estan situados en una línea recta o,o',o''.... G, perpendicular al plano de todos los círculos, y pasa por el centro mismo de la esfera. Si por el estremo G de esta recta se pasa un plano MN paralelo al de las secciones, y por consecuencia perpendicular á oG, será tangente á la esfera.

* En efecto cualquiera otro punto de dicho plano estará mas distante que G del centro de la esfera, y por consecuencia estará necesariamente fuera de ella. Luego este plano no tocará mas que en G á la esfera. Todo plano que pase por goG cortará á la esfera en un círculo cuyo diámetro será goG, y cuya tangente en G será perpendicular á goG. Y como todas las perpendiculares en G á una recta goG estan en el plano perpendicular á esta recta, y pasan por G, se sigue que el plano tangente MN contiene todas las tangentes de los círculos meridianos que tienen goG por diámetro. Podria demostrarse con no menos facilidad, que todo círculo menor trazado en la esfera por el punto G, tiene su tangente en G situada en el plano MN. *

Hablando de superficies como de líneas se llama *normal* la línea goG, fig. 28, perpendicular en G al plano tangente.

Apliquemos estas primeras nociones á las diversas familias de superficies que hemos exâminado en las lecciones precedentes.

Plano tangente al cilindro. Sea el cilindro ABCabc, fig. 29, terminado por dos bases situadas en planos paralelos, y que tengan todas sus líneas correspondientes paralelas. Si Bb es una arista, las tangentes MBN y mbn de las dos curvas en B y b serán paralelas, y lo mismo sucederá con cualquiera otra tangente $m'b'n'$ á la curva

$a'c'b'$ paralela á las bases, estando b' en las aristas Bb. Todas las tangentes paralelas MBN, $b'm'n'$...., mbn, que pasan por la arista B$b'b$, que es una línea recta, forman un plano, el cual es tangente al cilindro en toda la estension de la arista.

Formacion de planos con los cilindros tangentes. El panadero, que hace rodar su rodillo paralelamente á sí mismo, forma con la masa un plano que sucesivamente es tangente en cada arista á la superficie cilíndrica del rodillo.

El jardinero consigue el mismo resultado en las calles y paseos del jardin con un cilindro que lleva rodando. A medida que el terreno se allana llega á ser tangente al cilindro en toda la estension de las diversas aristas de su superficie.

El maestro de coches, suspende los coches con una sopanda de cuero por cada lado, fig. 31. Esta sopanda sigue el contorno inferior y cilíndrico de le caja del coche, y se prolonga de manera que su cara superior presenta un plano tangente á la caja del coche. Cuándo la caja se valancea de adelante hácia atrás, adelanta ó retrocede en este plano tangente, que siendo el mismo en ambos lados, evita el traqueo transversal, que es el mas desagradable y violento en los cuarruages que no estan suspendidos.

Construccion de un cilindro por planos tangentes. Vamos á recordar aquí el método que hemos dado en la leccion que trata de los cilindros para cortar un cuerpo sólido, de manera que su superficie sea cilíndrica. Para esto se trazarán las bases en los dos estremos de la pieza de madera, de piedra, &c. que se ha de cortar en forma de cilindro, despues se trazarán dos polígonos circunscritos á estas bases, que tengan sus lados correspondientes, iguales y paralelos. Hecho esto con la sierra, el cepillo, ó cualquiera otro instrumento para cortar superficies planas, se harán pasar planos por los lados paralelos de estos polígonos. De esta suerte se tendrá un prisma poligonal, circunscrito al cilindro, porque

sus caras serán tangentes á la superficie del cilindro. Si ahora con la sierra, el cepillo &c. se cortan las aristas del prisma para formar nuevos planos tangentes al cilindro, cuanto mas se multipliquen estos planos tanto menos se diferenciarán del cilindro los prismas que se formen.

Planos tangentes al cono. Si se tira una arista SABC en el cono, fig. 32, todas las tangentes en ABC á las secciones paralelas A*a*, B*b*, C*c*, son paralelas entre sí. Todas estas tangentes juntas formarán el plano PQMN, tangente al cono en toda la estension de la arista SABC.

Aplicacion. Esta propiedad del cono dá el medio de que trazando un polígono circunscrito á la base, se haga una pirámide cuyas caras sean tangentes al cono en toda su longitud. Cortando sucesivamente con la sierra, el cepillo &c. las aristas de esta pirámide con nuevos planos tangentes, se multiplica cada vez mas el número de las aristas. Entonces se ejecuta una superficie que representa el cono con el grado de precision que se necesita (véase leccion décima).

Planos tangentes á las superficies evolvibles. La propiedad que tiene el mismo plano tangente de tocar el cilindro y el cono en toda la estension de una arista pertenecen igualmente á las otras especies de superficies evolvibles. Puédense considerar estas superficies como formadas de pequeñas caras cónicas sumamente estrechas, que tienen como las del cono un mismo plano tangente, en toda la longitud de cada arista.

Puédese hacer pasar una superficie evolvible por dos curvas dadas, circunscribiendo á éstas unos polígonos tales, que pase un plano á un mismo tiempo por un lado de cada polígono; el cual plano será tangente á la superficie evolvible. Cortando las aristas que forman el encuentro de estos planos, se aumentará el número de lados de los polígonos circunscritos á las dos curvas, y el número de las facetas planas tangentes á la superficie evolvible que se quiere producir.

Cilindros tangentes uno á otro en una arista. Poniendo al lado uno de otro dos cilindros rectos circulares, ABCD, BCEF, fig. 30, de manera que sus ejes esten paralelos y distantes una cantidad igual á la suma de los rádios de las bases, los dos cilindros se tocarán en toda la estension de la arista BC. De esta suerte en toda la estension de dicha arista las dos superficies tendrán un mismo plano tangente. Imaginemos ahora que haya delante y detrás de los dos cilindros una tabla horizontal cuya haz superior esté en la direccion misma de este plano. Si se pone una hoja metálica en una de las dos tablas, y se la hace pasar entre los dos cilindros, igualmente distantes uno de otro, se aplastará la hoja metálica de tal modo, que las caras paralelas llegarán á ser *planos tangentes*, la de arriba al cilindro superior, y la de abajo al cilindro inferior. Se ve por esto que el laminado de las hojas metálicas por medio de cilindros está fundado en la propiedad de los planos tangentes á las superficies cilíndricas.

Conos y cilindros tangentes en una arista. Cuando un cilindro ABCD, y un cono ADE, fig. 33, tienen una misma arista AD, y en D la misma tangente MQ, el plano que pasa por MQ y por la arista AD es á la vez tangente al cono y al cilindro en toda la estension de AD. Luego el cilindro y el cono son tangentes uno á otro en toda la estension de AD.

Los herreros, los hojalateros y los caldereros hacen uso de esta propiedad para dar la forma cilíndrica á las hojas de hierro y hojas de lata, &c. Para esto ponen la hoja de manera que la direccion de las aristas del cilindro sea tambien la de una arista de la punta cónica de una bigornia representada por ADE. Despues con un martillo, cuyo estremo está vaciado en cilindro, van doblando con igualdad la hoja en toda longitud de la recta en que el cono toca á la hoja que hay que poner curva. De este modo estan seguros de formar una superficie cilíndrica, y formarian de la misma manera una superficie cónica, ó generalmente una superficie

evolvible, aumentando ó disminuyendo gradualmente la curvatura de la hoja metálica, segun que el martillo dé en la arista de contacto AD mas cerca ó mas distante del vértice A.

Cilindros tangentes y cubiertas de otras superficies. Si se supone que una línea recta constantemente paralela á su direccion primitiva se mueve permaneciendo siempre *tangente* á una superficie dada, formará un cilindro, el cual será tangente á la superficie propuesta, en todos los puntos de contacto de las aristas del cilindro y de dicha superficie.

Cilindros cubriendo la esfera. Supongamos, por ejemplo, que se tenga una esfera *abcd*, fig. 34, y que una línea recta, siempre tangente á la esfera, se mueva paralelamente á un eje que pase por el centro de la esfera. De este modo se formará un cilindro recto circular que tocará á la esfera en toda la estension de un círculo máxîmo *amcn*. Se podrá hacer ir adelante ó atrás la esfera en este cilindro sin que deje de tocarle en un círculo paralelo á *amcn*, y perpendicular al eje del cilindro.

Aplicaciones. Las artes hacen frecuente uso de la propiedad que acabamos de esplicar. Siempre que una esfera ha de caminar en un eje rectilíneo XOY, hace que se mueva en un cilindro que la cubre y la toca por todas partes.

Tal es el principio en que está fundada la forma de las armas de fuego, como fusiles, pistolas, cañones, obuses y morteros. Su superficie interior tiene la forma de un cilindro recto circular, y las balas, bombas y obuses á que se quiere dar cierta direccion son esferas que se les hace seguir la direccion del eje de estos cilindros.

Calibres de las esferas. Para averiguar: 1.° que las balas no tienen un diámetro escesivo, lo que impediria que entrasen en la boca de fuego que les corresponde; 2.° que no son muy pequeñas, lo que quitaria al tiro toda su certeza, hay un patron, fig. 35, que es unos cilindros

rectos circulares, que tienen las aristas muy cortas. Con una mano se toma el mango ABab, y con la otra se presenta la bala en diversos sentidos para ver si puede pasar por el patron, y que pasa sin dejar demasiado vacío entre éste y la bala. Esto se llama *calibrar* las balas.

Aplicacion á las sombras. La naturaleza nos presenta á cada instante ejemplos de superficies cilíndricas, formadas de líneas rectas paralelas entre sí, y tangentes á la misma superficie. Cuando un cuerpo terminado por una superficie curva está iluminado por el sol, si dicho cuerpo es opaco, hace una sombra detrás de sí. Los rayos que separan ésta y la parte iluminada por el sol son necesariamente los que tocan al cuerpo sin que éste los intercepte.

Estos rayos paralelos son pues *tangentes* á la superficie del cuerpo. Luego *la reunion de los puntos que limitan en el espacio, la sombra arrojada por un cuerpo forma un cilindro, que tiene todas las aristas tangentes á éste.* La reunion de los puntos de contacto de la superficie del cuerpo con el cilindro que limita la sombra arrojada por éste forma una curva, la cual es la línea de separacion de sombra y de luz en la superficie del cuerpo iluminado.

Cuando se quiere determinar con exâctitud en un plano las sombras arrojadas por un cuerpo, hay que construir los cilindros que forman las tangentes á las superficies de este cuerpo, paralelas á la direccion supuesta de los rayos solares. Despues hay que determinar la *interseccion* de esta superficie cilíndrica con la superficie de los cuerpos sobre que cae la sombra. Esto es un estudio de importancia para el arquitecto y el dibujante. Si se hace ir adelante ó atrás paralelamente á sí mismo el cuerpo iluminado en la direccion dada por los rayos solares, cada uno de sus puntos describirá una línea recta, paralela á dichos rayos; y por consecuencia todos los puntos del cuerpo que estan en el cilindro, límite de la sombra arrojada en el cuerpo, seguirán el camino de estos rayos, que no dejarán de ser tangentes á

la superficie del cuerpo. El mismo cilindro será siempre el límite de la sombra arrojada por el cuerpo. Este cilindro, que rodea constantemente el cuerpo en todas sus posiciones, es lo que se llama con respecto á este cuerpo *una superficie cubierta*.

Así, pues, el cilindro recto es la superficie cubierta de la esfera que se mueve en línea recta, conservando constantemente el mismo rádio. El alma del cañon es la seperficie cubierta del espacio que corre la bala.

Se puede abrir en un cuerpo una superficie cilíndrica, *cubierta* de una esfera de rádio constante, cuyo centro se mueva en línea recta. Esto es lo que sucede cuando se tira una bala en un cuerpo blando y no frágil.

Recíprocamente se puede fabricar una esfera, haciendo girar un cilindro alrededor de una línea recta que sea perpendicular á su eje, y que pase por este eje. El cilindro tocaria en cada posicion á la esfera en un círculo meridiano, y la reunion de estos meridianos formará la esfera misma. Suponiendo que estos meridianos esten trazados muy cerca los unos de los otros se podrán sustituir á los cilindros tangentes los aros cilíndricos comprendidos entre dos meridianos consecutivos. En este caso se viene á parar en el método de aproximacion que hemos dado en la leccion undécima.

Finalmente, los mismos medios podrán servir para construir: 1.° superficies de figura cualquiera con otras superficies que las toquen por todas partes, y que se muevan en una direccion paralela á las aristas del cilindro; 2.° para construir una superficie cualquiera por medio de un sistema de cilindros que la toquen en cada una de sus aristas.

Aplicacion á la carpintería. Cuando el carpintero tiene que formar molduras que tengan un contorno curvilíneo, toma un cepillo, cuyo hierro representa el perfil ó seccion transversal de dichas molduras, y cuya batalla es una superficie cilíndrica, que tiene este perfil por base. Despues mueve su cepillo de manera que siempre esté tangente al contorno que ha de seguir la mol-

dura. En este movimiento la superficie cilíndrica del cepillo es sucesivamente tangente á la moldura fabricada en toda la estension del perfil dado por el hierro del cepillo, y la moldura es la superficie cubierta del cilindro que presenta la batalla del cepillo. Las superficies cónicas nos ofrecen consideraciones y resultados análogos.

Si suponemos que de un punto dado S, fig. 36, se tiran á la esfera O todas las tangentes posibles SA, SB, SC...., se formará un cono recto circular tangente á esta esfera, en toda la estension de un círculo ABCD, que sirve de base al cono. En efecto, si se hace girar el círculo máximo ABE, alrededor del eje SO, tirado por S y por el centro O de la esfera: 1.° el círculo formará la esfera: 2.° SA, SB, tangentes á este círculo máximo, formarán el cono.

Supongamos que el centro O se mueve en el eje SO, creciendo ó menguando el rádio de la esfera proporcionalmente á su distancia al punto S. En virtud de la propiedad de las figuras semejantes la esfera no dejará de tener por tangentes todas las aristas SA, SB, SC, del cono SABCD. Luego este cono es la cubierta del espacio corrido por la esfera, cuyo centro se mueve en línea recta, y cuyo rádio crece ó mengua proporcionalmente á la distancia del centro á un punto fijo de esta recta.

Sustituyendo á la esfera otra superficie curva cualquiera podríamos hacer igualmente que de cada punto tomado fuera de esta superficie salieran todas las líneas rectas que fuesen aristas de un cono que la tocase en cada una de sus aristas. Si el punto tomado por vértice del cono es un punto luminoso, el cono formado de este modo señalará detrás del cuerpo el límite de la sombra arrojada por este cuerpo. Si se quiere trazar rigorosamente el límite de la sombra arrojada por este mismo cuerpo, en una superficie cualquiera, será preciso determinar la *interseccion* de esta superficie con el cono, que es límite de la sombra, arrojada por el cuerpo iluminado.

Esplicacion de los eclipses. Aplicando este método á la astronomía se ha determinado la forma y la amplitud de los eclipses. Imaginemos que la luna haya de pasar casi en línea recta entre la tierra y el sol. Considerando como dos esferas la luna y el sol podemos concebir un cono recto circular, que será la *cubierta* de estos dos astros, y señalará en el cielo el límite de la sombra arrojada por la luna. Mientras la tierra esté enteramente fuera de este cono de sombra el sol no se eclipsará; pero cuando una parte de la tierra entrára en este cono esta parte quedará privada de la luz del sol. Para la tierra el sol quedará eclipsado por la luna, y habrá lo que llaman eclipse de sol. Si se determina la posicion respectiva de los tres astros en cada instante que ha de durar el eclipse, y la interseccion de la superficie de la tierra con el cono, *cubierta* del sol y de la luna, esta interseccion señalará en la tierra un cierto espacio. Solo en los lugares situados en este espacio habrá eclipse total en el momento de que se trata. Por último, si se trazan todas las intersecciones dadas en los diversos momentos de la duracion de un mismo eclipse, los puntos que estuvieren fuera de estas diversas intersecciones no se eclipsarán totalmente, y los otros se eclipsarán en un tiempo mas ó menos largo. La geometría determina de este modo todas las circunstancias de un eclipse de sol, y con igual facilidad determina las circunstancias de un eclipse de luna.

Si imaginamos un cono recto circular que *cubra* á la vez la superficie de la tierra y la del sol, cuando la luna entre en el cono de la sombra arrojada por la tierra, habrá eclipse de luna. Si la luna entra totalmente en el cono, hay *eclipse total* de luna, y cuando la luna no entra en él mas que en parte, hay *eclipse parcial.* En este último caso se conocerá la figura y magnitud del eclipse en cada instante, determinando las intersecciones de los conos *cubiertos* del sol y la tierra con la superficie de la luna.

Cuando miramos un cuerpo cualquiera, y tiramos á

este cuerpo, como acabamos de hacerlo con respecto al sol, radios visuales que le sean tangentes, determinarán éstos en este cuerpo el límite de los puntos visibles para nosotros, que es lo que se llama el contorno aparente del cuerpo que consideramos.

En la pintura dibujamos en la superficie del cuadro los contornos aparentes de un cuerpo, que son la interseccion de esta superficie con la de un cono que tiene todas las aristas *tangentes* á este cuerpo, y cuyo vértice está en el centro de nuestro ojo. El conocimiento de los conos *cubiertas* de los cuerpos, es pues indispensable para poner de una manera rigurosa en perspectiva los cuerpos que no estan terminados solo con líneas rectas.

Cuando una esfera luminosa *oab*, fig. 39, ilumina una esfera opaca OAB, desde luego se puede concebir un cono S*a*AB*b*, que cubra á la vez las dos esferas, y que señale en la esfera OAB la separacion absoluta de la sombra y la luz. Despues se puede concebir otro cono *mn*TMN situado entre las dos esferas. Desde el espacio IMN comprendido en este cono sobre la esfera iluminada, se verá toda la esfera luminosa. Pero de cada punto del espacio AMNB no se vé mas que una porcion de la esfera iluminada, ó lo que es lo mismo hay sombra parcial que es lo que se llama *penumbra.* Cuando se quieren sombrear los cuerpos con escrupulosidad se deben señalar con cuidado las sombras y las *penumbras*, lo que se hace con métodos análogos á los que acabo de indicar.

Si las dos superficies *aob*, AOB, no tuviesen ninguna analogía no podrá *cubrirlas* un mismo cono tangencialmente las dos á la vez. En este caso tendríamos una *superficie evolvible* que se podria construir, suponiendo que un plano permaneciese tangente á la vez á las dos superficies, y presentase sucesivamente todas las posiciones compatibles con esta condicion. En cada posicion uniremos con una línea recta los dos puntos donde el plano es tangente á dos superficies. La reunion de estas líneas formará una superficie evolvible

que separará la sombra y la luz, ó las sombras y las penumbras, segun que esté fuera del cuerpo luminoso ó del cuerpo iluminado, ó que pase entre los dos cuerpos.

Yo siento que los límites de este curso, y las consideraciones elementales á que debo reducirle no me permitan mas que indicar estas bellas propiedades de las superficies evolvibles.

Cuando se fortifica una plaza, es menester que desde fuera de la plaza, á tiro de cañon, no sea posible echar directamente los proyectiles sobre el terraplen de las obras donde han de estar los defensores. Se concibe una superficie evolvible tangente á la cresta de las fortificaciones á las cimas de los terrenos que rodean la plaza á tiro de cañon. Esta superficie evolvible no ha de cortar en ninguna parte al terreno donde los defensores se sitúen, ni tampoco á una superficie que sea menos alta que la estatura ordinaria del hombre. Esto se consigue con los métodos geométricos. Las artes hacen frecuente uso de los conos, para dar á los cuerpos formas determinadas. El que hace almadreñas se vale de una hoja rectilínea y cortante, que por un estremo está fija en un punto, y por el otro tiene un puño que le coge con la mano derecha. Con la mano izquierda presenta en una posicion fija el trozo de madera que quiere trabajar, y lo corta con el instrumento. Cada vez que hace este corte produce una superficie cónica tangente á la almadreña en toda la estension de una cierta curva. La reunion de las curvas cortadas de este modo llegan á producir la superficie de la almadreña, que es la superficie *cubierta* de todos los conos trazados con la herramienta.

Cuando el tornero quiere dar á un cuerpo la figura de una superficie de revolucion, toma primeramente una herramienta muy estrecha, para hacer muescas que lleguen hasta el contorno de esta superficie. Despues toma un escoplo plano y ancho, teniéndolo en una direccion tangente al contorno que ha de tener la superficie. En cada una de sus posiciones el escoplo plano corta un

cono. La reunion de los conos formados, haciendo desviar cada vez muy poco la posicion y direccion del instrumento, presenta varias cintas ó aros cónicos por todas partes tangentes á la superficie de revolucion, la cual está por todas partes involuta, y finalmente producida por dichos conos.

Los aros de los toneles y de los mástiles ensamblados, son conos tangentes á las superficies de revolucion de los mástiles y de los toneles.

Entre los diversos modos de trazar las superficies, hay algunos con que se logra mas ó menos continuidad en tal ó tal sentido; lo que los hace mas ó menos ventajosos, segun los requisitos que piden los productos de la industria.

Examinemos ahora las superficies *cubiertas* que se pueden formar con la flexion de ciertas líneas á las cuales se atan las superficies involutas.

Supongamos que un hilo inestensible representa el eje de un cilindro ó de un cono circulares, ó de cualquiera otra superficie de revolucion. Supongamos que se ata á este hilo el centro de cada esfera involuta tangencialmente por el cilindro ó por el cono ó por cualquiera otra superficie de revolucion. Doblemos despues el hilo formando una curva cualquiera. La superficie *cubierta* de todas las esferas no será un cilindro, ni un cono, ni cualquiera otra superficie de revolucion, sino una superficie compuesta de varios círculos, que cada uno de ellos sea comun á la una de las esferas, y á la superficie *cubierta*.

Cuando se dobla el eje del cilindro la superficie *cubierta* está formada de varios círculos todos iguales al círculo máximo de las esferas iguales que primitivamente estaban involutas por el cilindro. Todos estos círculos tienen perpendicular su plano á la curva formada por el eje doblado, y su centro está en este eje.

El serpentin del alambique es una superficie *cubierta* de este género, formada, 1.° doblando el eje del cilindro de modo que siga el contorno de una espiral cilíndrica,

2.° Tomando la *cubierta* de todas las esferas iguales que tienen su centro en este eje.

En la escalera circular de bóveda circular, ésta bóveda es tambien la *cubierta* de esferas iguales que tiene su centro en el contorno de una espiral cuyo paso es igual al de la escalera.

Cada vuelta de una cuerda de tres cabos simples es tambien la *cubierta* del espacio que podria correr una esfera, cuyo centro siguiera la espiral trazada en medio del cabo.

Hay gusanos y otros reptiles que estan formados de cortos anillos cilíndricos, cuyas articulaciones pueden ensanchar y contraer. La piel de estos animales, cuando se alargan ó se encojen, presenta una superficie que varía de forma, pero sin dejar de tener la figura de las superficies de que indicamos ahora la construccion.

Cuando se dobla en círculo el eje del cilindro recto circular, queda trasformado de nuevo en superficie de revolucion, que es la superficie anular que hemos examinado en la leccion undécima, y de la cual hemos dado las proyecciones y la generacion.

Las superficies *cubiertas* de una esfera de rádio constante tienen la propiedad, que en cada una de sus partes, si se cortan con un plano perpendicular á la curva, que es el lugar de los centros de las esferas: **1.°** el plano es por todas partes perpendicular á la *cubierta*; 2.° la seccion es de una magnitud constante, pues es el círculo máximo de esferas iguales (**1**).

---

(1) *Sin error apreciable para nuestros sentidos, se puede suponer que la curva en que se hallan los centros de las esferas es un polígono cuyos lados son sumamente pequeños. En este caso la cubierta se compone de todas las zonas ó fajas cilíndricas que tocan en círculos las esferas involutas. La reunion de los círculos de contacto forman la superficie involuta, sea cual fuere el número de los lados del polígono aun cuando éste llegue á ser una curva contínua.*

Cuando se necesita que pase cierto volúmen de agua por un canal de secciones circulares, ha de tener éste por todas partes la misma seccion para que el agua corra por todas partes con una misma velocidad y no se atasque en ninguna parte. Para esto será pues necesario que la superficie del canal sea la cubierta de una esfera de rádio constante.

En cualquiera otra especie de canales destinados á que corra por ellos el agua, debe tambien ser su seccion una curva ó un polígono cuya superficie sea constante. Para mas regularidad y facilidad en la ejecucion, debe conservarse la misma figura á la seccion, escepto en los parages donde no lo permitan dificultades estraordinarias.

Al tratar de los centros de gravedad, en el tomo II (Máquinas), daremos un medio fácil de determinar el volúmen de los cuerpos, y los espacios terminados por las *superficies canales* que acabamos de definir. Daremos sobre esto un método tan sencillo como fácil, muy riguroso y que tiene muchas aplicaciones á las artes.

El herrero, el plomero, el vidriero, el alfarero, el calderero, ejecutan muchos productos de industria, que tienen la forma de las *superficies canales*. Primeramente hacen unos prismas ó cilindros, mazizos ó huecos, á los cuales dan una cierta flexion. Todo su arte consiste en hacer que los cuerpos en que trabajan de este modo no pierdan la forma constante que han de conservar las secciones transversales.

Los arillos, los anillos, los collares de hierro, de cobre, &c. y los sacatrapos, los resortes en espiral, los tubos en línea curva, los sifones, los tubos de barómetro, las venas del cuerpo humano son otros tantos ejemplos de las superficies que consideramos.

Hablando de la interseccion de las superficies, hemos dicho que se pueden representar las superficies de doble curvatura, con unas especies de anillos, ó tambores cilíndricos, ó cónicos. Este modo tiene sus inconvenientes en las superficies canales, y es que falta

la continuidad en el sentido longitudinal, y que las secciones en sentido transversal no son constantes.

Hay ciudades donde los hojalateros y los caldereros trabajan las hojas metálicas con un arte particular. Saben darles una doble curvatura, y conservarles una seccion regular y constante en todas las partes. Acerca de esto deben citarse particularmente los artesanos de la ciudad de Lion, quienes llevan mucha ventaja á los del mismo Paris.

El ingeniero de puentes y calzadas para el trazado de las partes curvas de sus canales tiene métodos geométricos especiales, cuyo objeto es asegurar la forma constante de la seccion, y que la posicion de su plano sea en todas partes perpendicular á la superficie del canal.

En vez de suponer que una superficie de magnitud constante corre un cierto espacio, cuya *cubierta* se busca, supongamos que la superficie movible muda de magnitud, pero sin cambiar de forma.

El caso mas sencillo, y que ya hemos examinado, fig. 36, es el de la esfera que varía de rádio mientras su centro anda una línea recta.

Sabemos que la cubierta es una superficie de revolucion; cada esfera está tocada, involuta en un círculo por esta superficie de revolucion. Es aquel un círculo paralelo, y la reunion de estos paralelos forma la superficie misma de revolucion.

Supongamos ahora que al eje de la superficie de revolucion estan atados los centros de estas esferas. Doblemos este eje formando una curva cualquiera. La *cubierta* nueva de todas las esferas variará de grueso lo mismo que las esferas; pero tocará, cubrirá siempre á cada esfera segun un círculo.

La naturaleza nos presenta un gran número de superficies de este género.

La culebra cuando está derecha tiene la figura de una superficie de revolucion muy aproximada á la de un cono prolongado. La culebra se enrosca de mil maneras, y la superficie de su piel muda á cada instante de figura; mas siempre forma la cubierta de muchas esferas que se podrian imaginar involutas tangencialmente por la superficie de su piel.

Las artes han imitado la figura de la culebra, cuando está enroscada, en el instrumento de música que tiene el nombre de serpenton, fig. 37, la trompeta, fig. 38, la trompa de caza, fig. 41, los sacacorchos, las barrenas, &c.

Si suponemos que la culebra se enrosca en espiral y que tenga en el centro su cola, fig. 40, formará una superficie análoga á la que tienen muchas conchas.

Casi todos los cuernos de los animales tienen en la punta la forma de una superficie del género de las que aquí hablamos, fig. 42.

Las artes han imitado esta figura de los cuernos de los animales en la construccion de muchos instrumentos de música. La corneta de las tropas ligeras, y la trompeta acústica, son superficies de esta forma.

Para hacer instrumentos de viento, cuyo sonido reuna la exactitud y la belleza, la superficie curva que se les dá ha de tener mucha continuidad, y por consiguiente importa elegir para fabricarlos los medios que conserven esta continuidad en el sentido longitudinal, en que el aire es impelido en el instrumento y en el sentido transversal en que la seccion ha de ser circular por todas partes.

Los medios variados que hemos dado para construir diversas especies de superficies servirán para juzgar de los métodos que emplean los fabricantes de instrumentos de viento, y á veces para valerse de otros métodos mas exactos.

Pulimento, bruñido, &c. En las artes no basta tener métodos ingeniosos para conseguir cierta exactitud de formas mas ó menos satisfactorias. Aunque no fuese mas que por el placer de la vista, se debe dar á las superficies producidas de este modo cierta continuidad, cierto pulimento, cuya regularidad, lustre y brillantéz dan

nuevo valor á los productos de la industria. De aquí nacen las últimas operaciones de muchas artes para pulimentar, lustrar, bruñir, frotar, &c. Estas operaciones se efectúan con ciertos movimientos, para que el cuerpo que pulimenta describa superficies tangentes al cuerpo que se pulimenta; de suerte que este último es la *cubierta* definitiva de los espacios corridos por el primero.

Para bruñir el cañon de un fusil se toma un pedazo de madera plano y bien pulimentado, y se coloca tangencialmente al tronco de cono, que presenta el esterior del arma, moviéndole en la direccion de una arista de cono. El espacio corrido de este modo es el plano tangente al cono. Repitiendo la misma operacion en todas las aristas del cono, se tiene este cono como *cubierta* de todos los planos tangentes, y el arma queda bruñida.

Para bruñir la esfera se podia hacer que fuese adelante y atrás en un cilindro, presentándola cada vez en diferentes sentidos. Se podria ponerla en un torno, cuyo eje pasase por el centro de la esfera, despues hacerla girar frotando con una piedra plana que se pondria sucesivamente en diversas posiciones, tangentes á esta superficie. De este modo se pulimentaria la esfera por medio de los conos de que ella es la cubierta.

Los espejos se pulimentan frotándolos con superficies, cuyo plano tangente en todas sus posiciones es el plano que se quiere tengan en la cara pulimentada. Lo mismo se diria de los vidrios planos ó esféricos que emplean los fabricantes de instrumentos de óptica.

Cuando el carpintero de naves con su azuela pulimenta la nave, quita con cada golpe de este instrumento la madera superflua, siguiendo la figura de una superficie de revolucion, tangente á la superficie pulimentada de la nave. Esta superficie es en conclusion la *cubierta* de las superficies de revolucion producidas por el trabajo de la azuela.

No obstante de parecerme demasiado sucinta la es-

posicion que acabo de hacer bastará para que vean los artistas cuán fecundo es en aplicaciones inmediatas, variadas é importantes á la mayor parte de las artes el estudio de las formas geométricas, que distinguen las líneas y las superficies. Por no haber reflexionado sobre la figura de los productos de la naturaleza y la industria no descubrimos en esta figura las formas geométricas, las propiedades que se deriban de ellas, y los medios de trazado y de ejecucion que nos ofrecen estas propiedades características.

Desde el momento que la atencion de los artistas se pare á considerar la utilidad que les trae el exámen de la forma de los cuerpos, hará de ello el objeto de un estudio constante y casi involuntario. Verá los productos de industria como el naturalista ve la naturaleza, con aquella atencion perspicaz que descubre en cada objeto nuevo analogías con las familias y géneros que le son familiares, y diferencias que le sirven para caracterizar las especies, las variedades y los individuos. Este estudio no será un objeto de mera curiosidad, pues tendrá consecuencias tan importantes en la perfeccion de los métodos de la industria, que no nos atrevemos á pronosticarlas.

Pero no se llegará en las artes á mejoras positivas y de grande estension, sino practicando constantemente los métodos rigurosos del dibujo geométrico. Estudien los artistas con atencion los medios de trazado que les ofrece la geometría descriptiva, la cual les dará al mismo tiempo la demostracion de las útiles propiedades que yo apenas he hecho mas que indicarlas. Digamos, digamos sin cesar que la industria francesa, permanecerá en la infancia, si el dibujo lineal, y la geometría descriptiva no llegan á conocerse y practicarse generalmente en nuestras fábricas y talleres.

LECCION DÉCIMAQUINTA.

Curvatura de las líneas y las superficies.

Si suponemos que caminamos sobre una curva, mirando siempre en el sentido de la tangente á esta curva en el punto en donde nos hallemos, no bastará caminar hácia adelante, sino que habrá que revolver á cada instante hácia la parte reentrante de la línea que seguimos. *La curvatura de esta línea es proporcional á la cantidad que hay que revolver de este modo, dividida por cada pequeño espacio que se ande.*

Si caminamos sobre el círculo andando arcos iguales habrá que revolverse cantidades iguales. *La curvatura de un círculo es pues la misma en todas sus partes.*

Si caminamos sucesivamente sobre dos círculos desiguales, fig. 1, que tengan R y r por rádios, será $3,14 \ldots \times 2R$ la circunferencia del mayor, y $3,14 \ldots \times 2r$ la circunferencia del menor. Mas cuando se anda un círculo entero, y se camina siempre sobre la circunferencia, se dá una vuelta de 360°; luego las curvaturas C y c de dos círculos serán entre sí

$$\text{como } \frac{360^\circ}{3,14\ldots \times 2R} : \frac{360^\circ}{3,14\ldots \times 2r} :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r}.$$

Así, fig. 1, el contorno del círculo menor es mas curvo que el contorno del mayor en razon inversa del rádio menor al mayor. Luego la curvatura de los círculos está en razon inversa de la magnitud de sus rádios. He aqui porque la curvatura del círculo parece casi nula cuando su rádio es muy grande.

Aplicacion á la curvatura de la tierra. Como el rádio de la tierra tiene mas de seis millones de metros, su

círculo máximo es un *millon de veces menos curvo* que un círculo que tenga seis metros de rádio, y es ocho millones de veces menos curvo que un círculo tal como la rueda de un coche. Así su curvatura nos parece insensible en distancias pequeñas, y no empieza á ser apreciable sino en el mar ó en llanuras dilatadas.

El conocimiento de la curvatura de la tierra sirve para medir por aproximacion la altura de los montes y de las cuestas, cuando se conoce la distancia de estos lugares al punto donde nos hallemos.

* Sea AB el rádio de la tierra, y CD, fig. 2, el monte cuya cima D empieza á desaparecer de la vista del viagero que viene de D y llega á B. Si se conoce la distancia, BC inmediatamente puede medirse CD tirando el rádio ACD. Cuando el ángulo BAC es muy pequeño el arco BC es casi igual á la perpendicular bajada del punto B sobre AD. Se tiene, pues, con cortísima diferencia,

AB : BC : : BC : CD; esto es, el rádio de la tierra es á la distancia BC del monte en el punto donde se halla el viagero, como esta distancia es á la altura CD del monte. Por consecuencia $CD = \frac{BC^2}{AB}$.*

Los marinos cuando conocen la altura CD de un mástil ó de cualquiera otra parte de una nave concluyen por un método inverso la distancia BC á que se hallan de dicha nave; lo que suele ser de la mayor importancia en tiempo de guerra.

Acabamos de ver que el rádio de los círculos dá una medida de su curvatura, y ahora veremos que sirve igualmente para medir la curvatura de todas las líneas curvas.

Uno de los pensamientos mas felices de la geometría es este medio de dar la medida de la curvatura de las líneas curvas sirviéndose de líneas rectas, lo cual simplifica en estremo las operaciones tocantes á esta curvatura.

Sea AA'A''Z, fig. 3, una curva cualquiera, de la

que deseamos conocer la curvatura. Tomaremos de tres en tres sus puntos sumamente cercanos. Por tres puntos consecutivos AA'A'' describiremos un círculo ABC, el cual tendrá la misma curvatura que la curva AZ en el arco sumamente pequeño AA'A''. Lo mismo podríamos hacer respecto de cualquiera otro punto; y de este modo determinaríamos los círculos que tienen la misma curvatura que la curvan en sus diferentes puntos, y cuáles son los rádios de estos círculos.

El círculo ABC que presenta en un punto A la misma curvatura que la curva cualquiera AZ se llama el *círculo osculador* de esta curva: el rádio AO de este círculo es el *rádio de curvatura*; finalmente, el centro del círculo es el *centro de curvatura*.

Siendo el rádio perpendicular al contorno del círculo en A, y siendo uno mismo el contorno del círculo en A, A' y A'', en el círculo y la curva, resulta que el rádio de curvatura es perpendicular ó *normal* á la curva, cuya curvatura mide.

Supongamos que de los diferentes puntos A, A', A'', fig. 4, muy cercanos los unos de los otros, se hayan tirado las perpendiculares ó normales á la curva AZ, y que se haya tomado la longitud AO' del rádio de curvatura en A; la longitud AO' del rádio de curvatura en A; la longitud AO'' del rádio de curvatura en A'', &c. Estando los puntos A, A' sobre el arco del círculo, cuyo centro es O se tiene OA=OA'; y por la misma razon O'OA=O'A''; O''O'A'=O''A'''....

Atemos al punto A el estremo de un hilo inestensible. Tendamos este hilo por AO, y que siga el contorno dado por los puntos O, O', O''...., que son los centros de curvatura de AZ. Hagamos despues andar el punto A, pero teniendo siempre el hilo tirante, sin que pueda resvalar en O, O', O''....; la parte AO del hilo describirá un arco pequeño del círculo AA', que estará enteramente sobre la curva AZ, porque su centro es el centro de curvatura O de AZ, contando desde el punto A. Luego que llega á A', el hilo estará tirante en línea recta desde A' hasta O'. Cuando el punto A ande para pasar de A' á A'' el hilo tirante en línea recta desde O' describirá un arco de círculo A'A'', cuyo centro será O'. De la misma manera, cuando el punto A pase de A'' á A''', describirá un arco A''A''', cuyo centro está en O'', &c.

Así, cuando se conocen varios puntos O, O', O''...., muy cercanos, que son los centros de curvatura de una línea AZ, se puede trazar muy fácilmente la curva AZ con un hilo flexîble pero inestensible. Este medio se acercará tanto mas á la exactitud rigurosa cuanto menores sean las distancias á que esten los centros O, O', O''...., y será enteramente exacto si estos puntos se suceden sin intervalo y formasen una curva contínua.

Aun cuando no se emplee mas que como método de aproximacion el medio que acabamos de indicar, puede representarse la curva AZ con mucha mayor exactitud y continuidad que substituyendo á esta curva un polígono formado por las cuerdas y por las tangentes de ella. Con el nuevo trazado todos los arcos de círculo sustituidos á la curva AZ se unen longitudinalmente sin que queden ángulos como en los vértices de los polígonos, ni lados rectos que reemplacen las partes curvas.

Convendrá, pues, emplear el nuevo medio de producir las formas de las curvas que no pueden ejecutarse exactamente siempre que la continuidad de la curvatura sea de una grande importancia.

Hemos visto que el hilo AOO'O''..... se ponia recto al paso que el punto A, estremo de este hilo, describia la curva AC. Si examinamos la curva OPQ....X, que anda el punto señalado primitivamente sobre este hilo, veremos que XO^m es igual á la longitud total á la porcion del hilo primitivamente doblado en $OO'O''....O^m$.

Llámase evoluta la curva OPQX, que sirve para desenvolver la curva $OO'O''....O^m$, la cual está *desenvuelta* de manera que su longitud es por todas partes igual al rádio de curvatura OO', PO'', QO'''...., XO^m, de la curva OPX.

Las artes hacen un grande uso de las evolventes, y particularmente de la del círculo, fig. 5; úsanse en la construccion de muchas piezas de las máquinas.

Supongamos que hay una maza AB, fig.s 6, 7, 8, que está sujeta en una corredera, de manera que no pueda subir ni bajar sino por una línea vertical determinada. Hay que buscar el modo de que suba y baje.

Para esto se pone un árbol cilíndrico horizontal C que viene á tocar tangencialmente un sobarvo saliente DE, cuya parte inferior está en línea recta con el centro del árbol cuando la maza ha llegado al punto mas bajo, fig. 6.

Sobre el contorno del árbol se fija un arco OPQR, de la evolvente del contorno OO′O″O‴ del círculo que sirve de base al árbol.

Cuando este árbol dá vueltas, el punto O′ llega desde luego á la posicion que ocupaba O; y entonces la tangente O′P del círculo viene á estar vertical, fig. 7; será pues preciso que el sobarvo ED, llevando consigo la maza suba á una altura=O′P. El árbol sigue dando vuelta y O″ llega á la posicion primitiva de O; en cuyo caso el sobarvo y la maza se levantan á una altura igual á OQ. Finalmente, el árbol continúa dando vuelta y O‴ llega á la posicion primitiva de O, fig. 8, quedando O‴R vertical. No encontrando el sobarvo nada que lo detenga no impide la caida de la maza, y cae ésta libremente por el efecto de su peso, quedando en reposo hasta que la pala acaba su vuelta con el árbol y levanta otra vez la maza.

Este movimiento tiene la gran ventaja de ejecutarse sin sacudimientos, y como lo veremos en la mecánica, sin ninguna pérdida de fuerza.

En la leccion décimatercia hemos examinado la curva importante que se llama *elipse*. Siendo esta curva ABC, fig. 9, simétrica respecto de sus ejes, su evoluta DEF es tambien simétrica respecto de los mismos ejes. La elipse tiene su mayor curvatura en el estremo de su eje mayor, y la menor en el estremo de su eje menor.

Si hubiese que construir con mucha continuidad una elipse muy grande, fig. 9, se podria trazar la evoluta DEF, y descubrir la curva ABC por medio de un hilo y de un cordel doblado, ya sobre DE, ya sobre EF.

Importa observar, que aun cuando DEF fuese un polígono, esto es, varias líneas que forman ángulos, la curva ABC no presentaria por tanto ninguna parte rectilínea, ni ángulo alguno; y así tendria dos elementos de continuidad que faltan á DEF. La curva, cuya evolvente es ABC, tendria aun mas continuidad, pues sus rádios de curvatura crecerian ó menguarian por grados insensibles, aun cuando los rádios de curvatura de ABC se sucedieran sin continuidad, como en la construccion de la curva llamada *ansa*. Véase la leccion cuarta, fig. 36.

Ahora será fácil comprender diferentes géneros de continuidad, é importa mucho clasificarlas bien y retenerlas en la memoria.

1.° Puédese representar una curva, fig. **10**, con muchos puntos aislados y muy próximos unos á otros. Tales son las líneas puntuadas del dibujo, y tales son las direcciones señaladas por filas de árboles plantados á mayores ó menores distancias, en líneas rectas ó curvas, que se conciben por la vista fácilmente cuando estas curvas tienen alguna continuidad.

No obstante, aqui la continuidad no está mas que indicada por puntos, del mismo modo que lo está por números en los diseños que dan á conocer la posicion de un cierto número de puntos de cada curva. Los diseños de la carena de las naves son un ejemplo de esto.

2.° Puédese representar una curva por líneas rectas que sean sus cuerdas AA′, A′A″, A″A‴...., fig. **11**, ó las tangentes AA′A″...., fig. **12**. Por este segundo modo hay continuidad en la sucesion de los puntos, mas no en las direcciones, pues en cada vértice A′, A″, A‴..... del polígono se muda súbitamente la direccion.

3.° Puédense sustituir á la curva arcos de círculo AA′, A′A″, A″A‴, fig. 4, que tengan con cortísima diferencia el mismo rádio de curvatura que la línea

que representan; y entonces habrá continuidad en la sucesion de los puntos y su direccion. Si los arcos son muy pequeños, habrá continuidad en la direccion y en la curvatura de la curva. Así es como los arquitectos, segun queda dicho en otro lugar, trazan el perfil de las bóvedas rebajadas, y así tambien es como los ingenieros de puentes y calzadas trazan los arcos no circulares de los puentes.

Las artes, segun la importancia de sus operaciones, y el grado de exactitud que se requiere, necesitan emplear estos diversos grados de continuidad en sus construcciones y movimientos. A los maestros de talleres y fábricas es á quienes toca juzgar, segun los casos, cual es el modo que reune mayores ventajas por su facilidad, sencilléz y exactitud.

Los constructores de naves hacen uso de un medio mecánico, que conviene esplicar cuando quieren dar una grande continuidad de direccion y de curvatura á las líneas, sirviéndose de las cuales determinan y construyen la carena de las naves. Señalan los puntos aislados por donde ha de pasar la curva. Despues ponen clavos á los dos lados de estos puntos, y á tal distancia que una regla delgada pueda doblarse y colocarse entre dichos pares de clavos. Finalmente, la curva trazada con un lápiz, á lo largo de la regla doblada, debe pasar por todos los puntos AA′A″...., fig. 13. Es necesario tener mucho hábito de hacer esta operacion para que la curvatura de la línea esté formada desde un estremo á otro por grados insensibles, y presente aquella continuidad que contribuye á disminuir la resistencia que el agua esperimenta cuando la nave está en movimiento. En esta parte los constructores de navíos hallarán gran ventaja en el estudio de las formas geométricas. Este estudio les dará brevemente, y con seguridad, la facilidad de juzgar á simple vista.

El medio que es bueno para los grandes trazados no puede emplearse para dibujos pequeños, ejecutados sobre hojas de papel. En este caso en lugar de reglas grandes de madera se toman reglas pequeñas de vallena. Las unas, de igual grueso en todas sus partes, sirven para trazar las curvas cuya curvatura varia sumamente poco; y otras, adelgazadas gradualmente por un solo estremo ó por los dos estremos, sirven para trazar las partes de curva donde la curvatura disminuye gradualmente de un estremo á otro. Se doblan estas vallenas de manera que su contorno pase por los puntos indicados sobre el plano, como pertenecientes á la curva que se quiere trazar, y que se traza con un lapiz que se pasa junto á esta curva. Unos plomos P, P′, P″, fig. 14, cubiertos de papel ó de tela y de forma triangular, para mayor facilidad se ponen sobre el papel en lugar de los clavos de los trazados en grande, semejantes á los trazados de los constructores en las naves.

Para que pasen ciertas curvas por puntos dados, los dibujantes suelen emplear un instrumento que llaman (*pistolet*) pistola á causa de su forma ABCDE, fig. 15. Como presenta curvaturas sumamente variadas en la mayor parte de los casos, se puede poner este instrumento, de manera que trace por grados una figura que no presente ningun ángulo, y cuyas curvaturas se sucedan sin resaltos.

Hasta ahora solo hemos hablado de la curvatura de las líneas trazadas en un plano, las cuales se llaman *líneas de simple curvatura*.

Mas hay líneas que no se pueden trazar en un plano porque tienen dos curvaturas en vez de una, tales son las espirales trazadas sobre cilindros, conos, &c.

Para las líneas de doble curvatura, como para las líneas de simple curvatura, siempre se pueden tomar tres á tres, los puntos inmediatamente consecutivos, de que se componen, y hacer pasar por ellos un círculo, que será el *círculo osculador* de la curva en la estension del pequeño elemento comprendido entre los tres puntos. Llámase *plano osculador* de la curva el plano mismo del círculo osculador. Ningun otro, partiendo del elemento que se considera, prodria aproximarse mas á la

curva de doble curvatura. Por medio de los planos y los círculos osculadores, se podrá en las artes con varios arcos de círculo que se unan tangencialmente, trazar por aproximacion, y de una manera muy contínua todas las especies de curvas de doble curvatura.

Sobre la curvatura de estas líneas podrian manifestarse muchas consideraciones bellas é importantes. Mas como no son bastante elementales ni de una aplicacion, ni bastante inmediata ni bastante frecuente en el trabajo ordinario de la industria no hablaremos aquí de ellas.

La curvatura de las superficies es por el contrario de una consideracion contínua é indispensable en el trabajo de la industria.

Curvatura de la esfera. La esfera es la superficie, cuya curvatura es mas fácil de considerar y de medir. Tomemos sobre la esfera un punto cualquiera A, fig. 16, y tiremos del centro O el rádio AO que medirá la curvatura en A de todas las secciones que se hagan en la esfera con un plano que contenga el rádio AO, el cual medirá la curvatura de la esfera; la cual curvatura es constante, como se ve en todos los sentidos y en todos los puntos de la superficie. Así *en todas partes*, el rádio de la esfera es al mismo tiempo su rádio de curvatura, y el de todas las secciones hechas con un plano en el cual está situado este rádio.

El cilíndro recto circular considerado en el sentido de su base, tiene por rádio de curvatura el rádio mismo de la esfera que *cubre* y que toca segun el contorno de su base. Mas considerado en el sentido de la arista AB, fig. 17, no tiene curvatura, y si se pidiese qué longitud deberia tener el rádio del círculo osculador del cilindro, en el sentido de su arista, se veria que este rádio debe ser infinito.

Lo mismo sucede con el cono recto circular. En el sentido de su base el rádio de curvatura es el rádio de la esfera que *cubre*, y en el sentido de la arista la curvatura del cono es *nula*.

Las otras especies de cilindros y de conos, y generalmente las superficies evolvibles no tienen curvatura en el sentido de sus aristas rectilíneas, pero la tienen mas ó menos notable en el sentido perpendicular.

Hay que advertir que en el cilindro y el cono, las secciones en un rádio AO de la base, fig. 17 y 18, tienen siempre su centro de curvatura en lo interior de la superficie.

Así en toda la estension de una misma arista AA′A″...B de las superficies cónicas y cilíndricas, los rádios de curvatura AO′, A′O′, A″O″, estan dirijidos en un mismo sentido y son paralelos.

No sucede lo mismo con las superficies gauchas. Si por ejemplo se mira la superficie gaucha de la escalera, se verá que siempre en un sentido la curvatura vuelve hácia abajo su concavidad, y la vuelve hácia arriba en el sentido perpendicular.

El carril de una rueda de polea, fig. 19, tiene su menor curvatura dirigida en el sentido perpendicular al eje de la rueda, y su centro de menor curvatura situado sobre este mismo eje; pero en el sentido paralelo al eje el carril de la rueda tiene su centro de mayor curvatura en un punto *n*, equidistante de los bordes *m*, *p* del carril.

Tenemos pues aqui tres clases de superficies bien distintas cuando se atiende á su curvatura.

En la primera clase las curvaturas de las líneas, que se pueden trazar sobre cada superficie, estan todas dirijidas en un mismo sentido; esta clase comprende la esfera, los elipsoides la superficie del huevo, de la castaña, del capullo, del gusano de seda, &c.

En la segunda clase solo hay un sentido en que estan señaladas las curvaturas y son nulas en el otro: esta segunda clase no comprende mas que las superficies evolvibles, los cilindros, conos, &c.

Finalmente en la tercera clase, una parte de las curvaturas está dirijida en un sentido, y la otra en un sentido opuesto. De manera que tirando por un punto

dado de la superficie la normal á esta superficie, una parte de los centros de curvatura de las secciones se halla sobre esta normal, á un lado de la superficie, y la otra parte se halla al otro lado.

La superficie variada del cuerpo humano presenta estas tres clases de superficies. Así debemos referir á la primera clase las formas de las estremidades salientes. El talon, la rotula, la rodilla, el hombro, y los estremos de los dedos tienen sus dos curvaturas dirijidas en un mismo sentido.

Una parte de los muslos, de las piernas y de los brazos, no tienen curvatura en un sentido, y se refiere á las superficies de la segunda clase.

Finalmente vemos superficies de la tercera clase, esto es, que tienen sus dos curvaturas dirijidas en sentidos opuestos, en todas las articulaciones de los brazos, de los dedos, de los sobacos, &c., en la union de la cabeza, y del cuerpo con el cuello, &c.

Entre estas formas generales, la vista ejercitada del escultor y del pintor, descubre un sin número de diferencias en la sucesion y gradacion de las curvaturas de cada parte del cuerpo. Segun espresa estas diferencias con mas ó menos fidelidad, produce, ó las obras maestras en que la verdad causa la admiracion de los inteligentes, ó los bosquejos imperfectos cuya grosería repugna á los ojos del observador ilustrado.

Las curvaturas de las diversas partes de la superficie de nuestro cuerpo dependen mucho de la forma de los huesos, de los nervios y de los músculos que cubren la piel, por lo que el dibujante profundo debe siempre conocer la verdad de las formas que quiere espresar, teniendo cuidado de que esta espresion revele las formas ocultas pero sensibles de las partes interiores.

Un defecto notable en las obras de algunos artistas es el de hacer demasiado salientes, demasiado curvas, ó demasiado abultadas ciertas partes de la superficie de nuestro cuerpo; á fin de indicar con mas distincion las formas anatómicas, aun cuando sean imperceptibles á

la vista: esta afectacion no es mas que un charlatanismo indigno del talento de los grandes maestros.

La superficie de nuestro rostro tiene una movilidad preciosa, que depende mucho de nuestros afectos interiores, momentáneos ó constantes.

Los afectos constantes dan á la curvatura de las partes movibles, y aun al aspecto de las partes fijas, formas durables que la observacion continuada hace reconocer en sus menores diferencias. Tales son los caractéres de las fisonomías. Nuestros afectos pasageros producen en nuestras facciones mudanzas de forma mas ó menos distintas, mas ó menos fugaces, y su estudio es tambien de una alta importancia en la práctica de las bellas artes; pues ofrece variedades infinitas, entre las cuales el ingenio elige las formas adecuadas al carácter gracioso, ó severo, ó profundo, ó terrible de sus composiciones.

Me queda que hablar de un estudio recientemente imaginado acerca de las formas de la cabeza humana: ademas de una disposicion general de las dos curvaturas principales del cráneo se observan inflexiones y variedades de curvaturas locales, mas ó menos patentes en diversos individuos.

Estas partes mas ó menos curvas, mas ó menos abultadas, á que llaman gibas, se han considerado como signos esteriores de nuestras facultades mas ó menos enérgicas, inclinaciones mas ó menos decididas.

Es muy fácil rediculizar y aun mirar con desdén tales estudios; pero el prudente observador de las leyes de la naturaleza no desprecia con ligereza, así como no prodiga los elogios cuando se trata de estudios graves sobre objetos nuevos. Aun cuando sea cierto que el deseo de esplicar todo hubiese hecho multiplicar en demasía los indicios supuestos de nuestras inclinaciones y facultades, bastaria que un corto número de relaciones intelectuales tuviesen indicaciones mas ó menos remotas en las formas de nuestro cráneo, para que el estudio profundo de las variedades de sus curvaturas fuese uno de

los objetos mas dignos de ocupar las meditaciones de los sábios.

Las diversas partes que componen la estructura de los animales tienen un volúmen y formas rectas ó curvas que las hacen mas ó menos propias para ciertos movimientos. Este es el objeto de una ciencia todavía nueva, conocida con el nombre de *Anatomía comparada*. Esta ciencia dará á sus estudios un rigor útil, y perfeccionará mucho sus resultados, refiriendo á medidas geométricas, no solamente las dimensiones principales de cada parte del esqueleto de los animales, sino tambien la magnitud y direccion de la curvatura de cada elemento de este esqueleto, especialmente en las partes en contacto, esto es, las coyunturas.

Al mismo tiempo que este estudio podrá ser útil á los progresos de la Anatomía comparada, suministrará resultados muy ventajosos á los trabajos de la industria. Los animales, para satisfacer á sus necesidades, ejecutan con una perfeccion rara muchas operaciones en que las artes y oficios apenas llegan á la medianía. Los artistas hallarán modelos variables, muy ingeniosos en los medios que la naturaleza ha dado á los seres animados.

Los animales hervíboros tienen los dientes perfectamente dispuestos para moler las materias vejetales. La forma de sus dientes se conserva á pesar de lo que se desgastan en la operacion de la molienda del alimento; siendo así que las formas de nuestras piedras de molino se destruyen prontamente, lo que obliga á renovar con frecuencia esta forma, ó como se dice, á picar las piedras para que vuelvan á moler bien. El arte es pues aquí muy inferior á la naturaleza. Con esta idea Mr. Molard, miembro del Instituto, se ha ocupado en formar máquinas de moler, en las cuales ha tomado por modelo los dientes molares de los caballos, y no ha tenido necesidad de picar estas partes molares para impedir que la molienda fuese imperfecta.

La industria está pues interesada en que los anatómicos, los geómetras y los mecánicos, estudien de cierto las dimensiones, las *curvaturas* y las funciones de las diversas partes de los animales.

Dejemos ahora estas consideraciones generales sobre la importancia de los estudios de la curvatura de las superficies en la industria y la historia natural, para volver otra vez á los caractéres geométricos que pueden dar con sencilléz los elementos y las variedades de estas curvaturas.

En la superficie de la primera clase siempre puede trazarse una elipse proyectada paralelamente á su plano, fig. 20, en ABCD, la cual representa partiendo de un punto P, la forma de una rebanada de la superficie hecha paralelamente al plano *mn*, tangente á la superficie en P, y muy cerca de MN. Siendo PO la distancia del punto P al plano cortante MN, si se hacen pasar por el punto P una série de círculos que tengan sus centros sobre la normal ó perpendicular PO, y por el contorno de la elipse, se tendrán todos los círculos osculadores de las secciones hechas en la superficie por los planos de estos círculos.

El menor de estos círculos pasará por los vértices B, D, del eje menor de la elipse, y el mayor pasará por los vértices A, C, del eje mayor de la elipse. La fig. 20 doble representa todos los círculos acostados sobre un mismo plano que pasa por la normal PO*p* de la fig. 20.

Luego en las superficies de la primera clase, las cuales tienen todas sus curvaturas en el mismo sentido, la direccion de la mayor curvatura AB, es perpendicular á la direccion de la menor curvatura CD.

Así en todas las superficies, cuyas dos curvaturas estan en un mismo sentido, partiendo de cada punto, la direccion de la mayor curvatura es perpendicular á la direccion de la menor curvatura.

Siendo simétrico el contorno de la elipse, respecto de sus dos ejes, los círculos osculadores que pasen por el contorno, y por la perpendicular ó normal PO*p*, tambien serán simétricos respecto de los ejes AC, BD, esto

es, respecto de las dos direcciones de la mayor y menor curvatura. Así pues, las curvaturas intermedias de las secciones perpendiculares á la superficie, curvaturas que van por una degradacion contínua, desde la menor hasta la mayor, estan dispuestas simétricamente respecto de la direccion de la mayor y menor curvatura, contando desde cada punto de la superficie.

Respecto de las superficies de la tercera clase, un plano que las corte infinitamente cerca del plano tangente da una seccion, cuya forma es la de la hipérbola. La direccion de los ejes de esta hipérbola dará á la direccion de los dos ejes de mayor y menor curvatura. Las curvaturas intermedias estan dispuestas simétricamente respecto de la direccion de estos ejes. Las secciones hechas en la garganta de una polea, cuyas dos curvaturas estan en sentidos contrarios, se representan por dos planos muy cercanos al plano MN, tangente en P á esta garganta. Estas secciones tienen la forma de dos hipérbolas indicatrices, y convendrá tener esta figura en relieve.

Las superficies de la segunda clase pueden considerarse como el límite comun de las otras dos clases; y de consiguiente gozan de propiedades comunes á las otras superficies, cuales son tener sus direcciones de mayor y menor curvatura, perpendiculares entre sí, con todas las curvaturas intermedias, dispuestas simétricamente respecto de las curvaturas principales.

Yo he dado el nombre de *indicatrices* á las curvas que tienen la propiedad de *indicar* la naturaleza y las relaciones de la curvatura de las superficies, y he presentado todos los medios de usarlas para conocer las propiedades esenciales de la curvatura de las superficies. Los que gusten ver mas podrán consultar mi obra intitulada *Developpemens de geometriè*, y mis *aplicaciones de geometría* á la estabilidad de los cuerpos flotantes, á la construccion de naves, á los desmontes y terraplenes en las obras públicas, y finalmente á los fenómenos de óptica, producidos por la reflexion de manojos luminosos sobre espejos curvos cualesquiera.

Supongamos ahora que desde un punto de una superficie vaya uno caminando en la direccion de la mayor curvatura, y es claro que trazará una línea. Todas las líneas trazadas de este modo cubrirán enteramente la superficie, y formarán el *sistema de líneas de mayor curvatura.*

Si, por el contrario, se empieza á andar desde un punto dado de la superficie en la direccion de las menores curvaturas, se trazará una nueva línea; todas las líneas trazadas de este modo tambien cubrirán enteramente la superficie, y forman el *sistema de líneas de menor curvatura.*

Finalmente, siempre las *líneas de mayor curvatura serán perpendiculares á las líneas de menor curvatura.*

Las líneas de curvatura tienen una propiedad muy útil para las artes, la cual me limito á indicar sin demostracion. Si por cada punto de una misma línea de curvatura se tira una perpendicular á la superficie, todas estas perpendiculares formarán una superficie, que será necesariamente evolvible (**1**).

En el cilindro, fig. 22, las líneas de menor curvatura son las aristas rectilíneas, en que la curvatura es *cero.* Las líneas de mayor curvatura son las secciones hechas en planos perpendiculares al eje, y el contorno de estas secciones es evidentemente perpendicular á cada arista. Luego en el cilindro las líneas de mayor y menor curvatura estan en ángulo recto.

En el cono, fig. 23, las aristas son tambien las líneas de menor curvatura, y se hallan las líneas de mayor curvatura del modo siguiente: póngase la punta

---

(**1**) *Se halla la demostracion de este principio, y la de todas las propiedades relativas á la curvatura de las líneas y de las superficies, en mis* Developpements de geometriè.

de un compás en el vértice del cono; trácense luego con la otra punta curvas diversas con distinta abertura de compás, pero todas perpendiculares á las aristas, porque desenvolviendo el cono, las dichas curvas se convertirán en círculos cuyos rádios serán las aristas.

En las superficies de revolucion los meridianos son las líneas de la una curvatura, y los paralelos las de la otra, y sabemos que los meridianos son en todas partes perpendiculares á los paralelos.

El célebre Monge ha hecho de las propiedades que acabamos de enumerar una bellísima aplicacion al corte de piedras.

Cuando hay que ejecutar bóvedas que tengan la forma de superficies curvas, se dividen estas bóvedas en compartimientos bastante pequeños para que cada uno pueda salir de una sola piedra.

Despues de haber trabajado la parte de la piedra que debe representar el compartimiento y haberle dado la figura que conviene á la superficie de la bóveda (intrados), se trabajan las caras llamadas juntas, que es por donde las diferentes piedras nombradas dovelas han de juntarse unas con otras. Para satisfacer lo mejor posible á todas las condiciones se pide: **1.°** que las caras de juntas tengan la forma mas sencilla y que se puedan labrar mas exactamente: 2.° que de su asiento resulte la mayor solidez. Esta última condicion exige que las caras de junta sean por todas partes perpendiculares á la bóveda, y es fácil ver de qué manera. Si en una dovela, la cara de junta formará un ángulo obtuso, con la bóveda, la dovela adyacente haria con esta bóveda un ángulo agudo. Por efecto de la opresion, la dovela terminada por una arista obtusa moleria la dovela terminada por una arista aguda, ó le haria saltar en pedazos al menor efecto producido por la carga y la presion.

La condicion de sencillez y facilidad pediria que se hiciesen las juntas, ó planas, ó por lo menos evolvibles. Cuando se adopte esta forma siempre podrá cortarse en papel, carton, ó cualquiera otra sustancia flexible, una hoja plana que tenga el contorno que convenga á la junta. Bastará doblarla como convenga para ver si se ajusta por todas partes con la junta que se pondrá perpendicular á la bóveda por medio de la escuadra.

Puesto que las condiciones exijen que se hallen superficies evolvibles que sean por todas partes perpendiculares á la bóveda y perpendiculares entre sí, tambien exijen que se escojan por líneas de juntas, sobre la superficie de la bóveda, *las líneas de curvatura de esta superficie.*

Cuando se construyen superficies cilíndricas, fig. 24, se escojen pues para las juntas, en una *primera* direccion, aristas paralelas igualmente distantes, que son las únicas de menor curvatura. En otra *segunda* direccion, curvas perpendiculares á estas aristas, que son las líneas de mayor curvatura. Las superficies de junta formadas por las normales de la superficie, segun estas aristas y estas curvas, son planos que se cortan en ángulo recto. El trabajo del cantero se reduce entonces á la mayor sencillez.

Cuando se construyen superficies cónicas, fig. 25, como para puertas y ventanas, abocinadas y otras, tambien se escojen para líneas de juntas las aristas del cono, y las curvas perpendiculares á estas aristas.

Cuando se quiera hacer una bóveda que tenga la forma de una superficie de revolucion, fig. 26, como por ejemplo un domo, se trazan sobre la bóveda unos compartimientos regulares compuestos de meridianos y paralelos. Las perpendiculares á la bóveda en la direccion del meridiano forman planos que son las juntas verticales de las dovelas. Las perpendiculares á la bóveda en la direccion de los paralelos forman conos que son las juntas del sentido horizontal, y estas juntas son evolvibles porque corresponden á las líneas de curvatura: finalmente las juntas cónicas se hallan cortadas en ángulo recto por las juntas planas que en los conos son planos meridianos.

No estenderé mas esta magnífica aplicacion, tan sen-

cilla, tan general y tan fecunda en su principio y sus consecuencias. Ella nos muestra toda la importancia que tiene en las artes el estudio de la curvatura de las superficies, y sus principales propiedades. Las bellas artes pueden sacar mucho fruto de este mismo estudio. Por el efecto variado de la luz y de las sombras juzgamos á simple vista, no solamente de los puntos salientes ó brillantes de las aristas bien terminadas, y de los contornos aparentes que dan un carácter á la figura de cada cuerpo, sino que tambien las degradaciones mas ó menos fuertes de sombra y de luz nos permiten que en las partes mismas donde no hay ningun punto, ninguna línea que sean particularmente notables, distingamos la forma de los cuerpos, y el género y grado de su curvatura en cada parte de su superficie.

Este estudio no solamente conviene al artista, sino que es útil á los hombres de todas las profesiones, porque les dá nociones mas rápidas, mas exactas y mas completas de la verdadera forma de los objetos que consideran ya por gusto ya por necesidad.

Examinemos cómo adquirimos por la vista la idea de la curvatura de las superficies.

Supongamos que hay una esfera ABC, fig. 27, iluminada en cierta direccion por los rayos solares.

Lo primero que haré será trazar la línea de separacion de sombra y de luz LLL, valiéndome de los principios espuestos en la leccion décimacuarta. Señalaré de oscuro la parte que está en la sombra, y no quedará iluminado mas que LLLBC, fig. 27. Así es como la luna se nos representa en sus diferentes fases desde que empieza á crecer, fig. 29, hasta el primer cuarto, fig. 28, en que la mitad del astro aparece iluminada, y la otra en la sombra; y despues como en la fig. 27 antes de llegar á la luna llena, que está toda iluminada, y al acabarse la luna en un eclipse en donde nada hay mas iluminado para el espectador. Si yo no considero mas que la parte iluminada LLLB sin otras degradaciones, nada me indica que dicha parte pertenezca á una esfera mas bien que

á una superficie prolongada ó aplanada en el sentido del rayo visual. Veamos como se aprecia esta diferencia.

Sobre la superficie que suponemos brillante como un espejo, hay un cierto punto O, fig. 27, de donde el espectador vería la imágen del sol ó del cuerpo luminoso. Este es el punto en que la luz reflejada por la superficie es mayor, y se llama *punto brillante*. Es menester determinar la posicion de este punto. Hácese esto fácilmente si se puede tirar la normal en O á la superficie del cuerpo. Entonces: 1.° los dos rayos, el de incidencia y el de reflexion, estan en el mismo plano que esta normal; 2.° forman un mismo ángulo con ella. Dadas estas condiciones la geometría descriptiva enseña el modo de hallar el punto brillante de las diversas superficies, dada la posicion del ojo y la direccion comun de los rayos de luz. Despues á medida que los rayos de luz llegan á la superficie, bajo un ángulo mas oblícuo, y se reflejan tambien bajo un ángulo mas oblícuo, habrá mas luz perdida, y la superficie parecerá menos luminosa. Claro es que alrededor del punto O pueden trazarse varias líneas, en cuyo contorno el cuerpo parece al espectador igualmente iluminado: tales son las líneas que llaman de *igual tinta*. Una vez trazadas estas líneas, basta darles varias tintas mas ó menos débiles segun el grado de luz que corresponde á cada línea, y se habrá pintado con suma exactitud la degradacion de la luz en la porcion de la superficie iluminada.

Por la forma y posicion de estas líneas se distinguirá perfectamente la naturaleza de la superficie y el género de sus curvaturas. Tendrán estas líneas un carácter particular y fácil de reconocer, en el cilindro, el cono, y las superficies evolvibles en general tendrán otro carácter en la esfera, las superficies de revolucion, y las superficies anulares, y otro en las superficies espirales y las superficies gauchas, &c.

Aunque las líneas de que acabamos de dar una idea no sean visibles sobre los cuerpos, y aunque la natu-

raleza produce las degradaciones de sus tintas por grados insensibles é infinitos, la vista no deja de habituarse á estudiar, á comprender, á reconocer estas formas generales y características que tienen las variedades de sombra y de luz, de las diferentes especies de superficies.

Verdad es que se advierte gran diferencia en el grado de habilidad que adquieren las diversas clases de hombres, segun que sus profesiones los abituan mas ó menos á considerar ciertas especies de superficies; el calderero, el hojalatero, el celeminero, distinguirán con grandísima facilidad si tales superficies ó fracciones de superficie son cilíndricas, ó cónicas, ó evolvibles en general, pero serán menos hábiles para reconocer otras formas.

El tornero en madera y metales, el alfarero, &c. que fabrican continuamente superficies de revolucion, distinguirán con una sola mirada, y sin el auxilio de la mano, si tal superficie ó porcion de superficie es de revolucion, y si alguna parte de ella está aplanada ó prolongada; pero serán menos hábiles para distinguir otras formas.

El arquitecto juzgará bien de las formas variadas de los cilindros, y de los conos semejantes á los de las bóvedas de sus edificios; juzgará bien de las superficies de revolucion semejantes á las de sus domos, y de sus columnas; pero será menos hábil para distinguir las formas de las superficies que no pertenecen á sus obras.

Es muy importante habituar todo un pueblo á juzgar por la simple vista del carácter de las superficies, y de su ejecucion mas ó menos perfecta; este es un medio de acelerar los progresos de la industria y de las bellas artes. De esto hablaremos mas latamente al esplicar las observaciones y estudios con que podemos dar mas perfeccion á nuestros sentidos, multiplicar y dilatar los socorros que nos suministran para dirigirnos en el trabajo. Véase el tomo 3.° *fuerzas motrices.*

Los escultores deben habituarse á distinguir á simple

vista en cada parte de superficie que tienen que reproducir, si las dos curvaturas estan en el mismo sentido ó en sentidos contrarios; á discernir el sentido de la mayor y el sentido de la menor curvatura; á seguir sobre las superficies las direcciones de la mayor y menor curvatura, á fin de reproducir el carácter general de las superficies que conciben ó copian, lo cual es lo que puede dar verdad á sus obras.

El pintor que con sus tintas tiene que figurar sobre las superficies, que no tienen mas que dos dimensiones, el relieve de los objetos de tres dimensiones, debe hacer un estudio profundo de la manera como cada especie de superficie degrada las diversas tintas, á fin de reproducir estos efectos con el pincel.

Finalmente el grabador y el dibujante con sus plumeadas ó su punteado deben entregarse á los mismos estudios para llegar á la misma fidelidad, sea para imitar, sea para idear.

EXPOSICION

HECHA

A LA SOCIEDAD DE FOMENTO

DE LA INDUSTRIA NACIONAL.

Sobre los progresos de la nueva enseñanza de geometría y mecánica aplicadas á la artes y oficios en favor de la clase industrial.

SEÑORES:

Permitidme que os presente una noticia sobre los progresos de la nueva enseñanza de la geometría y mecánica, aplicadas á las artes y oficios.

El carácter esencial de esta enseñanza consiste en que no supone mas conocimientos preliminares que los de las cuatro reglas de la aritmética; reglas que el profesor puede enseñar en cinco ó seis lecciones, y que hará bien en enseñarlas, si conoce que sus alumnos no tienen estas nociones primeras. Despues podrá llevarlos poco á poco á la inteligencia de las verdades y métodos de geometría y mecánica mas importantes para los diversos ramos de la industria.

La nueva enseñanza no será solamente útil á las ciudades fabricantes, sino que *aun lo será mucho mas á las ciudades poco adelantadas en industria*, pues formará en ellas mejores obreros, carpinteros, aparejadores, carreteros, herreros, cerrageros, relojeros, cordeleros, &c.

Su primer objeto es el de instruir á los artesanos y los dueños de talleres y fábricas, acerca de la parte

científica de sus profesiones respectivas; sea para dar á los productos de la industria las formas precisas que les convienen, lo que constituye el objeto de la geometría aplicada, sea para emplear la fuerza de los obreros, las fuerzas de la naturaleza inanimada y las de los animales, de manera que produzcan en cada caso el mayor y mejor efecto posible, lo que constituye el objeto de la mecánica aplicada.

El segundo objeto que tiene la nueva enseñanza es que toda clase de personas que se dedican á las artes, hasta los meros operarios, perfeccionen las facultades mas preciosas de la inteligencia, la comparacion, la memoria, la reflexìon, el juicio y la imaginacion; y ofrecerles medios para ejecutar sus trabajos de una manera menos penosa y mas fructuosa; prepararles un nuevo bienestar; hacer su conducta mas moral, grabando en sus ánimos ideas y hábitos de órden y razon, que son los fundamentos mas seguros de la paz pública y de la felicidad general.

Hay todavía otro objeto que la nueva enseñanza debe conseguir. Bien sabeis, Señores, que nuestros rivales mas temibles en industria, los ingleses y escoceses, han reconocido, de algunos años á esta parte, toda la ventaja de la enseñanza de las ciencias, aplicadas á las artes y oficios, hecha en favor de la clase industrial, y han abierto escuelas de esta clase en la mayor parte de sus grandes ciudades industriosas.

Han empezado esto por Glasgow, y muy pronto esta ciudad ha esperimentado los mas felices efectos. El ejemplo de los bienes que habia producido la instruccion á la clase obrera, puesto una vez á la vista del comercio y de la industria, tuvo en breve muchísimos que lo imitasen. Edimburgo y Lóndres fueron los que luego tuvieron su enseñanza industrial. Despues Liverpool, Manchester, Birmingham, Newcastle, Aberdeen, han tenido la suya: este movimiento se ha producido con tanta rapidéz, que desde el 1.° de enero al 1.° de julio de este año, se han contado en la Gran Bretaña trein-

ta y una ciudades, donde las nuevas escuelas estan establecidas.

Si la Francia hubiese quedado sin imitar este ejemplo, ya que no tratase de escederle, en poco tiempo la clase de nuestros artistas seria inferior teórica y prácticamente á la misma clase en Inglaterra y Escócia; y ahora menos que nunca podríamos sostener la concurrencia del comercio con nuestros rivales.

Penetrado de esta verdad he mirado como un deber el emplear mis débiles alcances en propagar en Francia la enseñanza de la geometría y la mecánica, aplicadas á todas las artes; enseñanza que por desgracia, siendo la mas necesaria, es la que está mas atrasada.

En efecto, la enseñanza de las artes químicas, fundada por sábios, ilustres y poderosos, como los Berthollet, los Guyton de Morveau, los Chaptal, los Fourcroy, los Vauquelin, y sus dignos discípulos los Gay-Lussac, los Thenard, los Darcet, los Dulong, los Chevreuil, los Clement y otros, se ha propagado en una generacion, en nuestras ciudades industriosas. Los esfuerzos poderosos de tales hombres han dado á la Francia el primer lugar entre las naciones que practican las artes químicas. En el dia mismo teme menos que nunca perder la preeminencia por efecto de ninguna rivalidad.

Menos dichosos somos, y menos adelantados estamos en la práctica de las artes geométricas y de las artes mecánicas; y así importa dirigir todos nuestros conatos á este punto. En el discurso de veinte años he recogido para mi propia instruccion en Francia, Itália, Holanda, y en los tres reinos británicos, las principales aplicaciones de la geometría y mecánica á las artes naúticas, militares y civiles; por lo que me ha parecido que podria componer y publicar con algun fruto un curso normal, para que lo enseñasen fácilmente los profesores de matemáticas, sin que tengan que pasar algunos años visitando fábricas y asistiendo á las obras públicas de la Francia y de otros países. Tengo

el honor de ofrecer á la sociedad de fomento las primeras lecciones de geometría, aplicada á las artes.

Cada leccion forma un capítulo separado, para que siendo corto el precio de cada cuaderno con su lámina, pueda cualquier operario adquirirlo sin tener que hacer un gasto que le incomode.

Varias personas ilustradas y amantes de la industria desean que estos cuadernos se hagan comunes en las fábricas y talleres; no solo por lo que importa á los operarios y maestros, sino tambien en beneficio de los gefes de los talleres y fábricas. Así lo creen varios fabricantes y varios protectores de la industria, quienes han regalado estos cuadernos á sus principales obreros y maestros. Basta estar entre los franceses el ilustre duque de la Rochefoucault, y MM. Jappy Hermanos, y la casa de MM. Wilson y Manby que está ya tenida por francesa.

Los señores Wilson y Mamby se han propuesto hacer que sus operarios asistan por las noches, despues de dejar el trabajo, á la esplicacion que se les dará de estas lecciones.

Los señores Perier tienen resuelto proporcionar la misma enseñanza á los operarios de su vasta mina de Anzin.

Yo entiendo que este buen ejemplo se siga en los establecimientos principales de nuestros fabricantes opulentos, especialmente en las fábricas aisladas.

Voy ahora á hablaros de la misma enseñanza estendida con plan mas vasto en las ciudades principales de la Francia.

El ministro de la Marina y de las Colonias deseoso de contribuir á los progresos de las artes en nuestros puertos de mar, tanto mercantes como militares, ha comunicado orden general á los profesores de hidrografia, de enseñar el curso de geometría y mecánica, aplicadas á las artes, tal cual se enseña en el Conservatorio de París, dando dos lecciones á la semana, á la hora en que se deja el trabajo.

Con esta sola disposicion que consagra el nombre del conde de Chabrol entre los mayores bienhechores de la industria francesa, cuarenta y cuatro puertos de mar tienen una enseñanza gratuita en favor de la clase artesana; siendo de notar que entre dichos puertos se cuentan unas ciudades como Marsella, Burdeos, Ruan, Nantes, el Havre, Caen, Dunquerque, Bayona, Brest, Tolosa, Rochefort, Lorient, Cherburgo, &c. &c.

En todos estos puertos las autoridades civiles y militares han concurrido á porfia para que tuviesen cumplido efecto el beneficio del ministro de la marina.

Los comandantes de la marina, los intendentes, los comisarios generales y ordenadores, y los comisarios de clases, no solo han solicitado y ayudado á los señores corregidores (maires), suprefectos y prefectos, sino que han revalizado en celo y emulacion con estos empleados para proporcionar en sus puertos respectivos todos los medios que podria pedir el profesor, como son un lugar capaz, leña, alumbrado, &c. &c.

Me contentare con citar un solo hecho para mostrar á la Francia industrial lo que puede esperar de la clase obrera de nuestros puertos.

La ciudad de la Rochelle no tiene mas que 18000 almas. Abierto el curso provisional en este verano, en beneficio de la clase obrera, asistieron desde luego 300 oyentes; y seis semanas despues se aumentaron otras ochenta personas mas, tanto de la ciudad como de los alrededores, á las que el profesor, con un celo digno de los mayores elogios, hizo un curso preparatorio, á fin de ponerlos en estado de seguir el que habia empezado con los otros.

Igual enseñanza se ha establecido en Nevers, ciudad de 12000 almas, que desde enero de este año cuenta doscientos alumnos, lo que está en la misma proporcion que el auditorio de la Rochelle.

Yo debo hablar ahora de los cursos que van á abrirse inmediatamente en las ciudades del interior.

Gracias á los desvelos é inteligencia de Mr. el baron de Rambaud, corregidor de Leon, Mr. Tabaraud, oficial que ha sido de ingenieros militares, enseñará en la segunda ciudad del reino la geometría y mecánica aplicadas á las artes.

El conde de Turmel, corregidor de la ciudad de Metz, acaba de publicar un programa muy digno de atencion para la enseñanza gratuita, como todas las de que he hablado, y otras de que hablaré en adelante, que va á darse por la noche á la clase obrera por tres oficiales de artillería, de ingenieros militares y de ingenieros de caminos y canales, MM. Bergery, Poncelet y Lemoine, todos discípulos de la escuela Politécnica.

En Nevers, donde la primera esperiencia ha tenido el mejor éxito, MM. Merin Boucaumont, &c. tambien de la escuela Politécnica, inmediatamente abrirán cursos no solo de geometría y mecánica aplicadas á las artes sino tambien de física y química.

En Versalles, gracias á los desvelos reunidos de Mr. el conde Destouches, prefecto, del corregidor y de Mr. Polanceau, ingeniero en gefe de los caminos y canales, la geometría y mecánica aplicadas á las artes van á ser enseñadas por un antiguo discípulo de la escuela Politécnica.

Lo mismo sucederá en Saint-Etienne, que deberá este servicio al celo de Mr. Blavier, jóven profesor de la escuela de minas.

Permitidme Señores que llame vuestra atencion por un instante, hácia la enseñanza que se ha abierto en Saint-Lo. Una ciudad pequeña que apenas tiene 8000 almas, ofrece un bello ejemplo á otras ciudades mayores de la Francia. En una proclama que publicó el caballero Clement, corregidor (maire) de la ciudad, con motivo de la consagracion de S. M., se lee lo siguiente: "el 30 de mayo (el dia despues de celebrarse los rego-«cijos por la consagracion de S. M.) se abrirá un curso «gratuito de aritmética, de geometría práctica y de de-«lineacion aplicado á las artes y oficios, para la clase «trabajadora que tantos motivos tiene para bendecir el

«nuevo reinado. Las lecciones se darán en un parage «provisional, que se indicará á los que aprenden las «profesiones y artes industriales, cuando vengan á ma-«tricularse á la casa de Ayuntamiento, donde se les «entregarán las cartas de admision.''

¡No os parece, Señores, que se siente algo de ternura y de oportuno en comenzar el año primero de un reinado de paz y de bondad, con el beneficio de la instruccion para las artes pacíficas y para la clase menos opulenta!

En este otoño se empezará en la ciudad de Saint-Lo un curso de geometría y de mecánica aplicadas á las artes, no meramente para los que las aprenden, sino para hombres ya formados en todas las profesiones.

En Clermont, capital del departamento del Puy-de-Dome, ciudad rica y populosa, el prefecto conde de Allonville, conocido por profundas tareas de estadística, ha fundado una escuela de geometría práctica y de delineacion, siguiendo el escelente método que ha dado Francœur.

En el mes de agosto, el conde de Allonville, al tiempo de distribuir por su propia mano los premios de esta escuela, manifestó al público, que Mr. Darlay, profesor del colegio Real de Clermont, abriria un curso gratuito de geometría y mecánica aplicadas á las artes, en beneficio de los hombres ya formados, dando las lecciones por la noche.

Mr. Petit, ingeniero de puentes y calzadas está disponiendo establecer igual enseñanza en la ciudad de Louviers.

Varios fabricantes acaudalados han ofrecido emplear todo su influjo para hacer igual servicio á las ciudades de Elbœuf y Sedan.

Algunos profesores é ingenieros animados de generoso amor del bien público han propuesto dar lecciones en Limoges, Poitiers, Tonnerre, Aix, Estrasburgo, Rennes, Douai, Valence, &c. &c. En todas partes admiten sus ofertas con el debido reconocimiento.

Esto es, Señores, todo lo que puedo deciros hasta el dia.

El 26 de octubre de 1824 la enseñanza de la clase trabajadora estaba reducida á un solo punto de la Francia, y en la capital. En 26 de octubre de 1825 esta enseñanza, en todas partes gratuita, está abierta en 59 ciudades.

Estas ciudades contienen una poblacion total de 2.040.000 almas. Así ya la ciencia puede decir á los hombres útiles comprendidos en este número: por pequeña que sea vuestra fortuna, si la naturaleza os ha dotado con un espíritu de raciocinio y combinacion, he aquí el medio gratuito y fácil de aprovecharos de este presente y de hacerle fructuoso.

Esto ya es mucho, pero es poco respecto á lo que nos falta hacer. Aun no hemos trabajado mas que para treinta y cuatro departamentos y quedan cincuenta y dos sin la nueva enseñanza; ¡ojalá que en el año próximo pudiéramos anunciar que una nueva parte de nuestro territorio goza ya de la nueva enseñanza, y que estas útiles luces se propagan cada vez mas en nuestra hermosa patria!

Notad, Señores, el admirable concurso de un gran número de hombres poderosos que ayudan á propagar la nueva enseñanza: todo el cuerpo de la marina, el de ingenieros militares, el de caminos y canales, y minas han pagado noblemente su tributo. Entre cincuenta y nueve profesores hay veinte antiguos alumnos de la escuela Politéctica, verdaderos discípulos del ilustre Monge, que van á difundir en la clase industrial las luces que recibieron del ingenio de su maestro.

Mientras que tantos esfuerzos se preparaban y cundian en nuestro país, el embajador de Francia en Londres, daba cuenta al ministro de los resultados de la esperiencia sobre los ensayos numerosos intentados en el mismo género, con un éxito admirable en la Gran Bretaña. Así el gobierno adquiria un dato seguro, positivo y completamente satisfactorio, relativamente á las

consecuencias de toda especie que podia esperar de la nueva enseñanza.

Monsieur el Delfin, buscando en su corazon otros resultados de esperiencia y de bondad, se ha pronunciado el primero en favor de una enseñanza útil á la clase trabajadora; ha conocido que un pueblo que le contempla inmediato al trono no debe en ninguna cosa ocupar el segundo lugar en el paralelo con los pueblos estrangeros; y en su corazon ha hecho una impresion de ternura la imágen de un bien nuevo que podrá difundirse entre muchísimos franceses.

Por fortuna, pues, tal reunion de hombres y de circunstancias nos quita el temor de que la nueva enseñanza cause recelo en ninguna parte á la autoridad. No ha nacido en tiempos de turbacion ni de discordia: no puede ser ni emblema, ni esperanza, ni contraseña para el espíritu de partido. Mero resultado del espíritu de utilidad, no será menos útil á los hombres de edad madura que á los mozos. Lo pide, lo dicta el tiempo en que vivimos para asegurar el progreso de nuestras artes, y sostener dignamente la lid con el estrangero, que cree poder fácilmente aventajar á la poblacion francesa en instruccion y luces. No, Señores, no permitamos que el estrangero alcance tan vergonzosa victoria. La patria de los Descartes, de los Pascal, de los Dalembert, de los Monge, de los Legendre y de los La-Place; la patria de los Vauban, de los Borda, de los Coulomb, de los Montgolfier, de los Riquet, de los Boucanson, de los Breguet y de los Prony, no quiere ceder á ninguna otra, ni la palma teórica de las ciencias matemáticas, ni la palma práctica de la ciencia aplicada y hecha popular. Fija la mente en aquellos insignes varones, cobraremos nuevo valor y fuerza para mantener esta lid ariesgada y salir de ella triunfantes.

Pero seria imposible que los profesores pudiesen conseguir tan bello resultado con solo sus esfuerzos, si los fabricantes y negociantes principales no empleasen su grande influjo en todas las ciudades de la Francia, y en sus propios establecimientos, para propagar y sostener la instruccion de la nueva enseñanza. Toca á la sociedad del fomento dirigirles la voz que será *oida de todos* con aprecio y gratitud.

Despues de haber recibido la sociedad de fomento la esposicion anterior, S. E. el ministro del interior, á consecuencia del informe favorable del Director general de fábricas y comercio, ha adoptado con gusto el plan que se le propuso para la enseñanza de la geometría y mecánica aplicadas á las artes, en las principales ciudades del interior; y ha encargado el autor de esta esposicion el formar profesores en un curso normal, para las ciudades que quieran tener esta enseñanza. Acaso los magistrados consultarán con fruto la tabla siguiente de los departamentos y ciudades que ya tienen profesores, ó donde se han ofrecido profesores generosos, y tambien de los departamentos y ciudades que aun no tienen medios para costear la nueva enseñanza.

TABLA

DE MATERIAS.

39

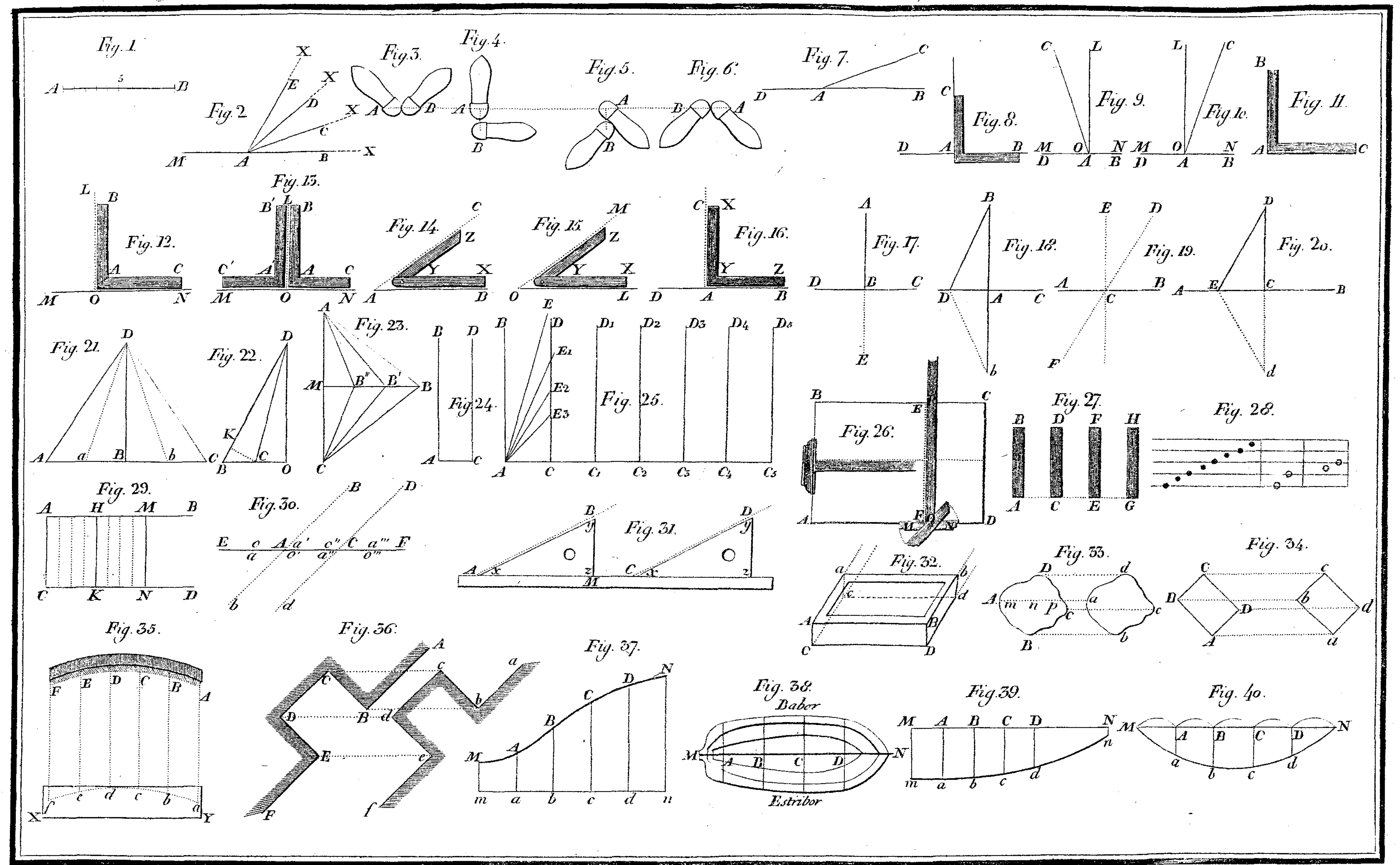
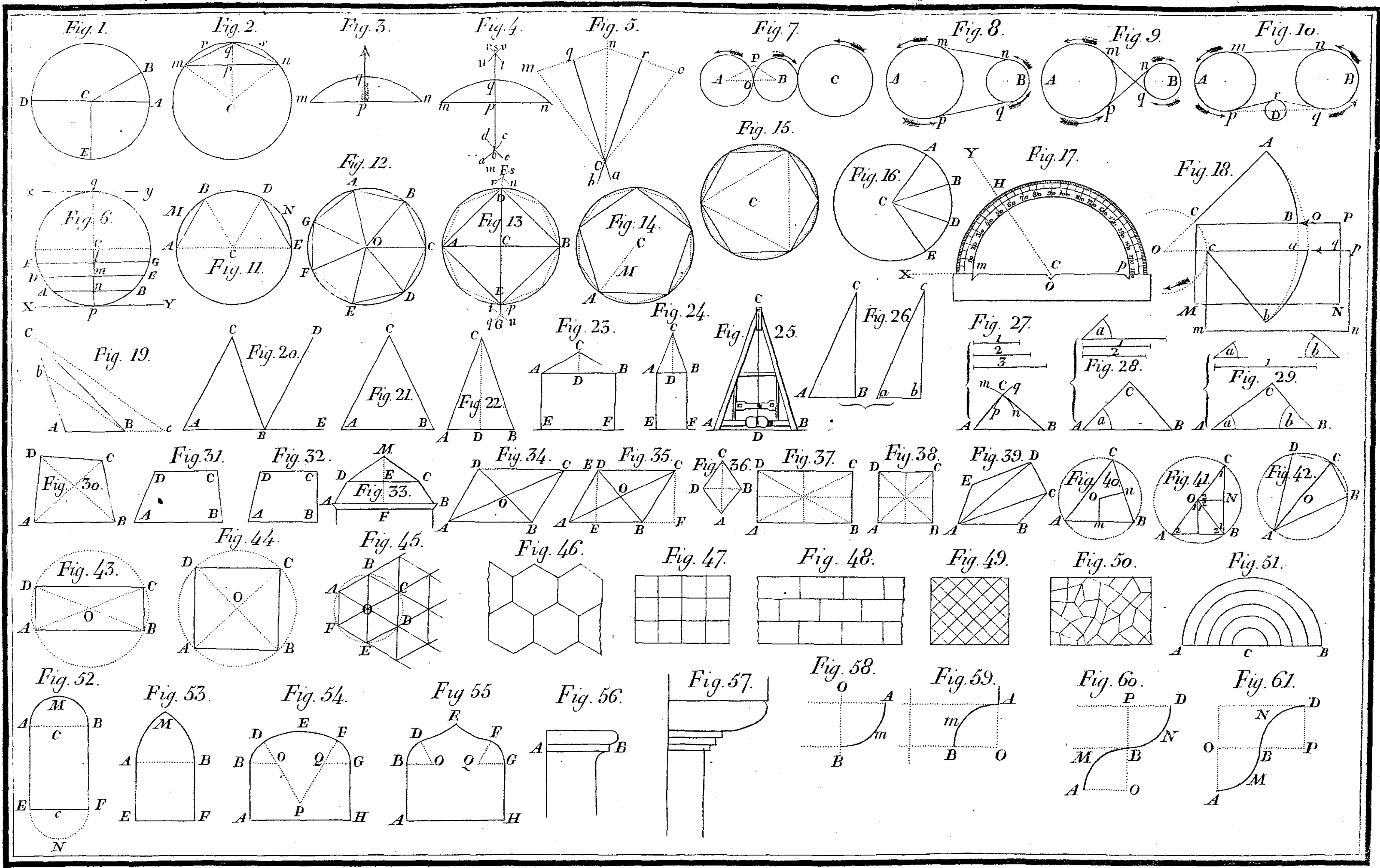
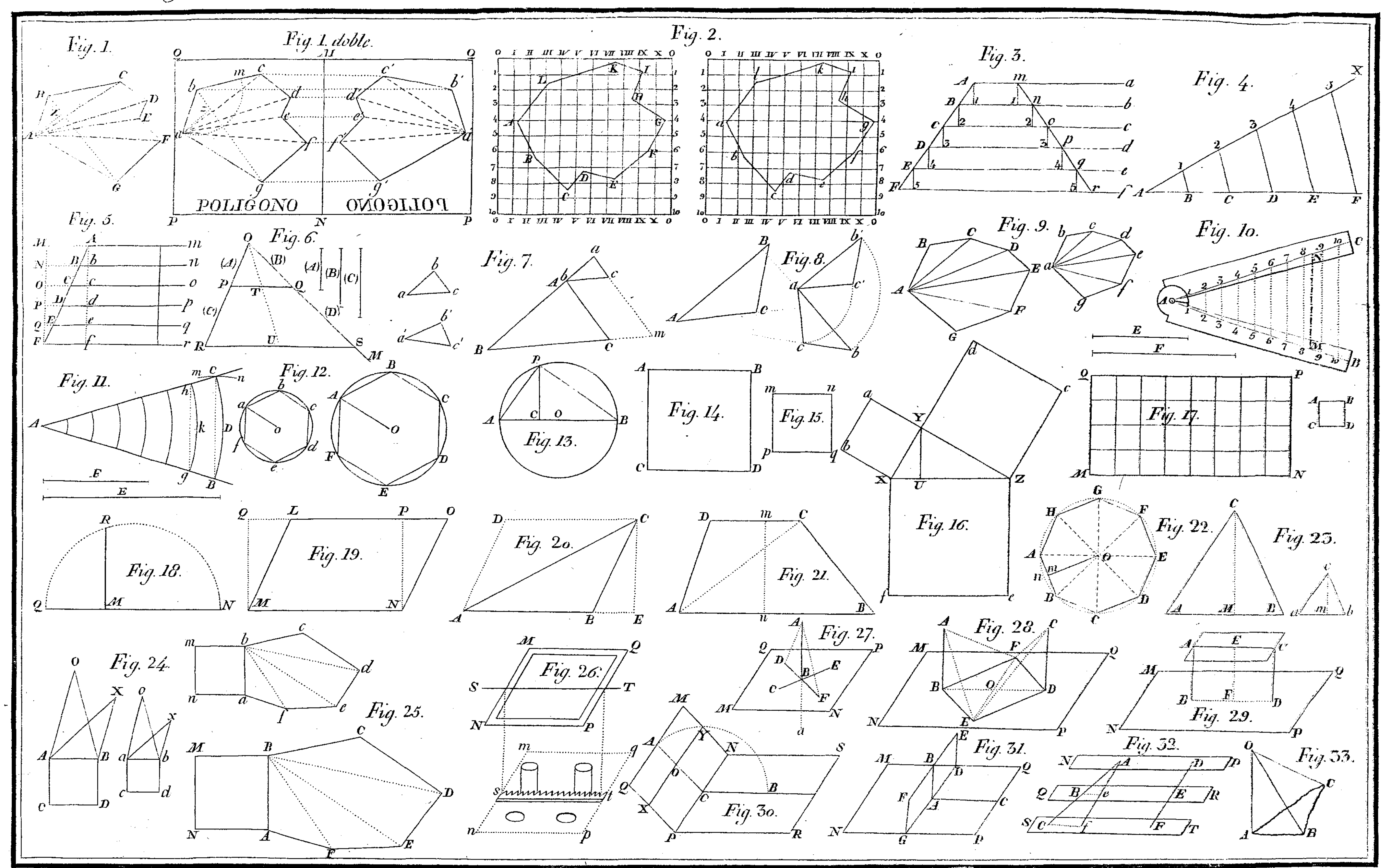
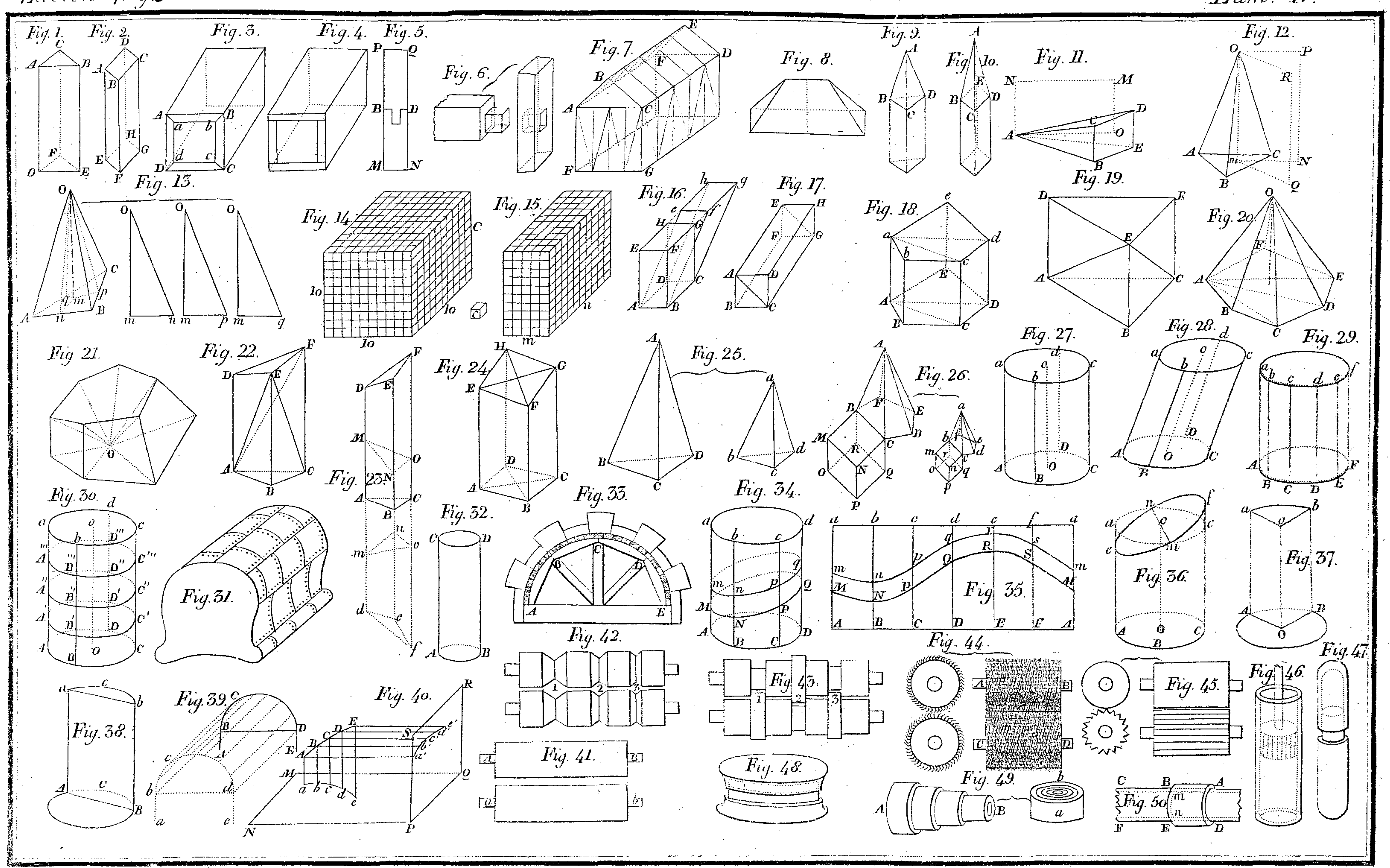
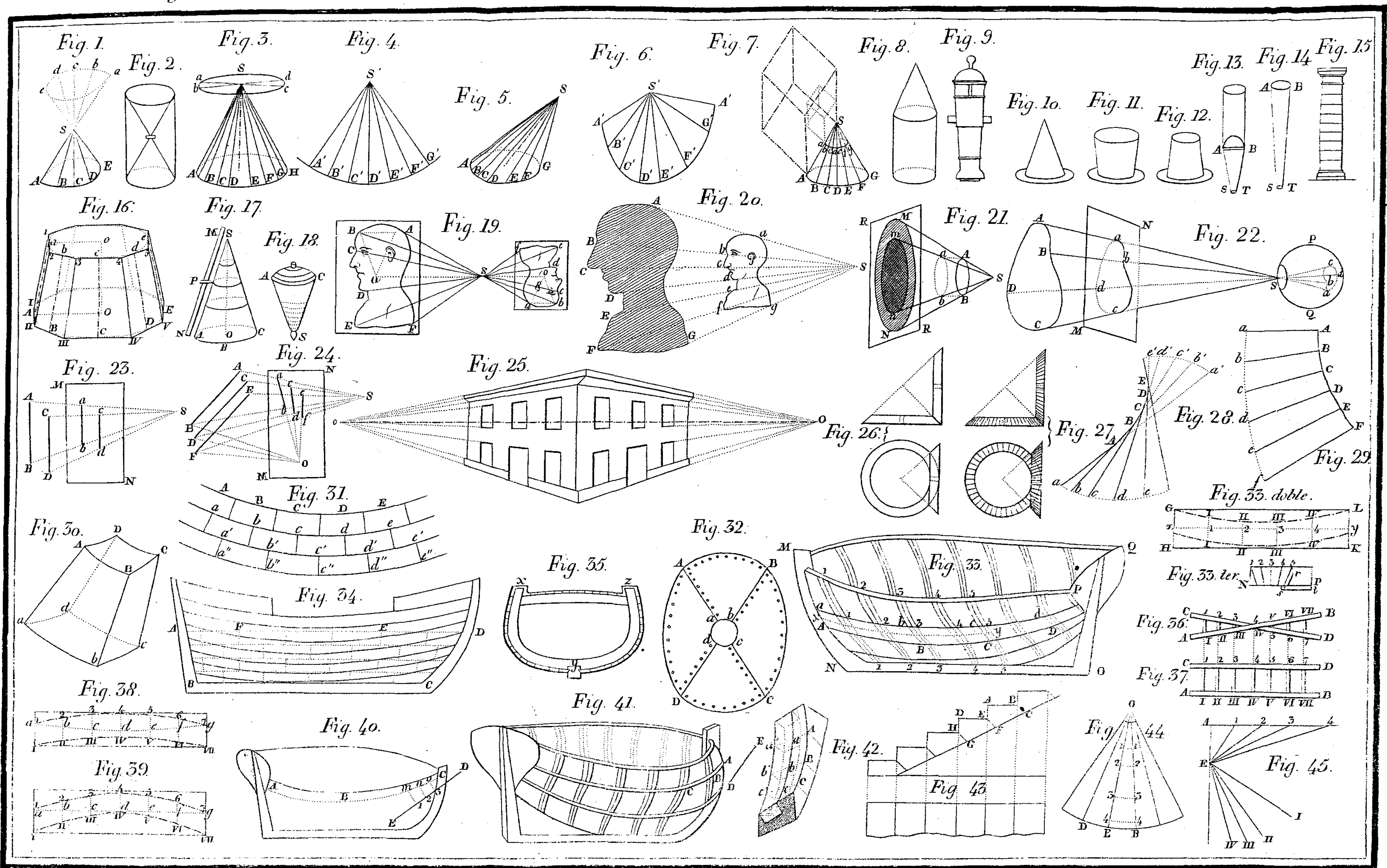


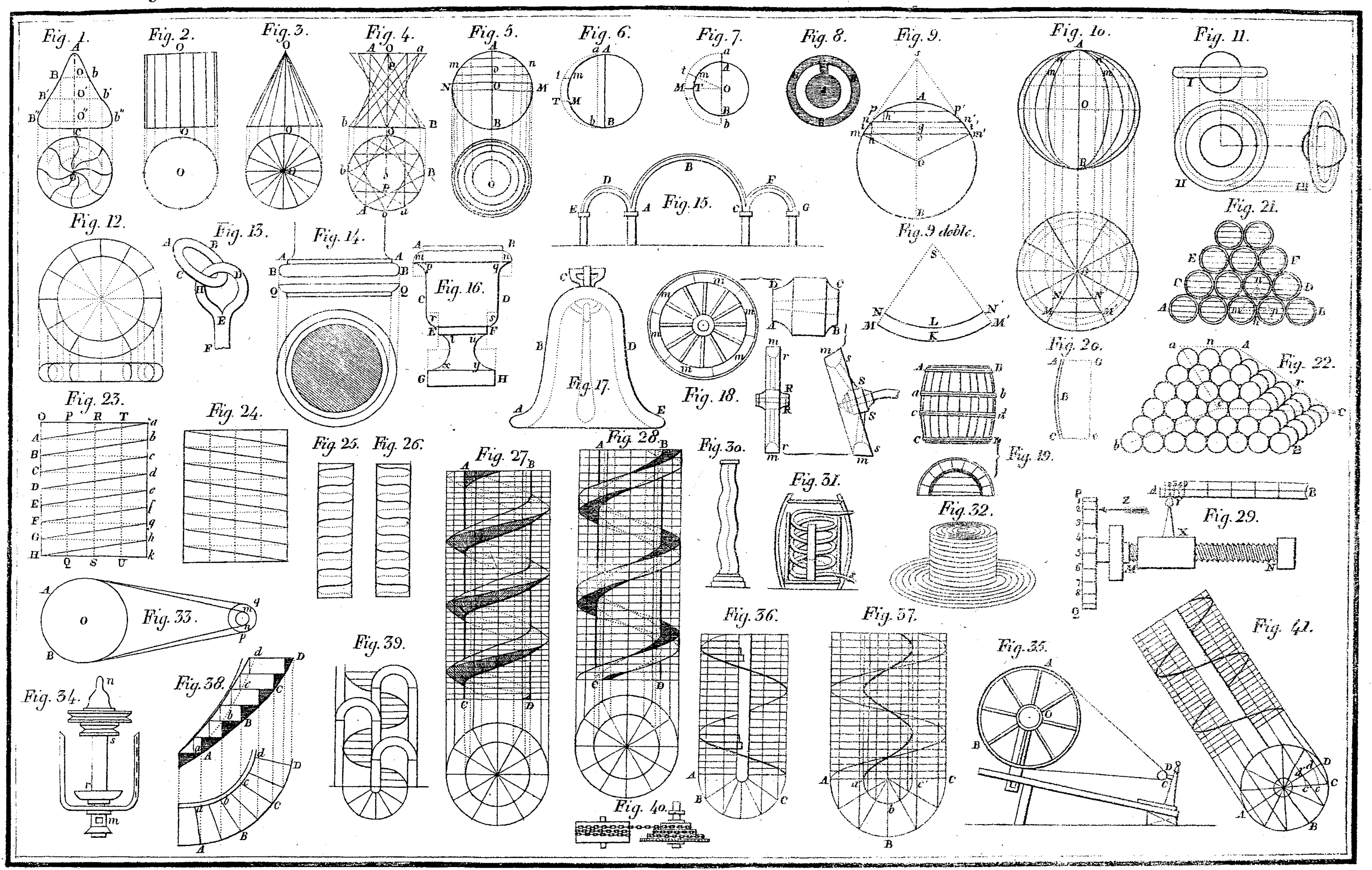
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Babor
Estribor
Fig. 39.
Fig. 40.

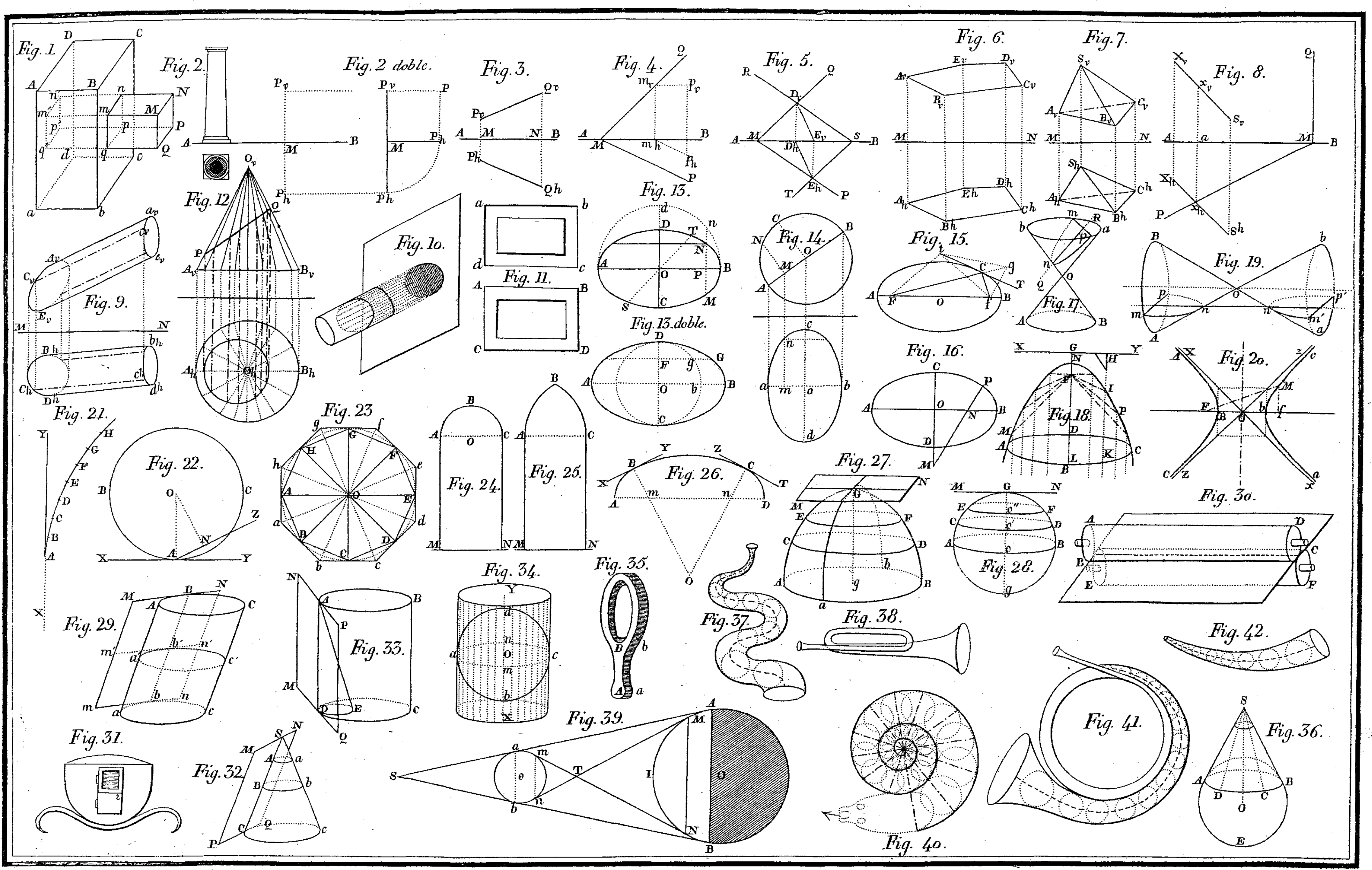

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.

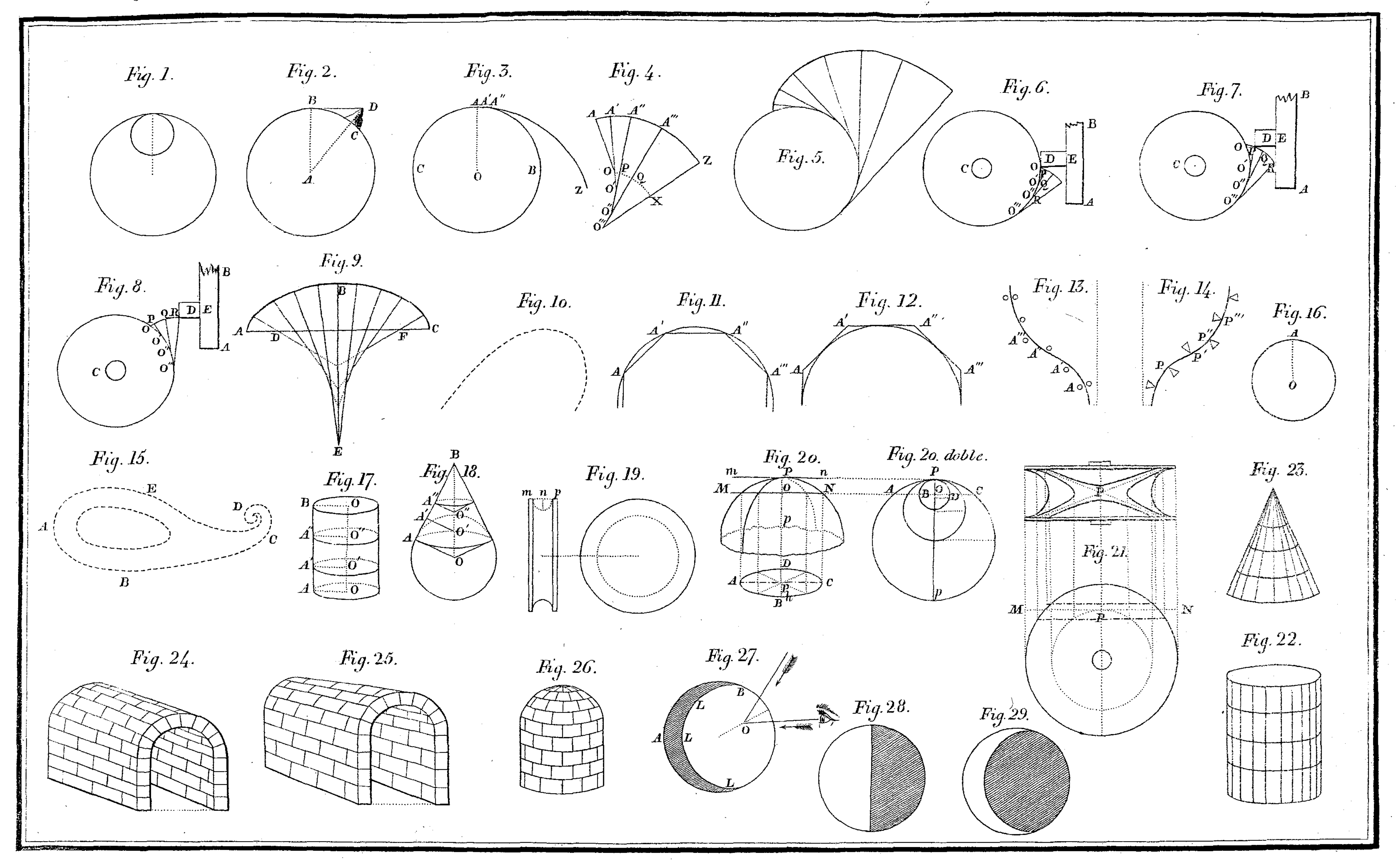

Fig. 1.
Fig. 1. doble.
POLIGONO
POLIGONO
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 33. doble.
Fig. 33. ter.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 9 doble.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27
Fig. 28
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 2 doble.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 13. doble.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 20. doble.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.